(extrait d'un livre intitulé “Symétries, invariants, quotients” en cours de préparation, par Laurent Lafforgue)

Chapitre VIII :
Topos, sites et topologies de Grothendieck

1 Définitions et propriétés des topos

a) Préliminaire : un double critère de représentabilité des foncteurs

On sait que tout foncteur représentable covariant [resp. contravariant]

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad [\text{resp.} \quad F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ]$$

respecte les limites [resp. transforme les colimites en limites] et que tout foncteur entre deux catégories localement petites

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

qui admet un adjoint à gauche [resp. à droite] respecte les limites [resp. les colimites].

Nous allons maintenant donner des conditions générales dans lesquelles ces implications deviennent des équivalences.

S'agissant du problème de représentabilité des foncteurs, on a :

Proposition VIII.1.1. –

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite qui admet des petites limites [resp. colimites] arbitraires.

Et soit

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad [\textit{resp.} \quad F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ]$$

un foncteur covariant [resp. contravariant] qui respecte les limites [resp. qui transforme les colimites en limites].

Alors :

(i) *Pour que F soit représentable, il faut et il suffit qu'existe une famille $(c_i, x_i)_{i \in I}$ de paires (c_i, x_i) constituées d'un objet c_i de $\mathcal{C}$ et d'un élément $x_i \in F(c_i)$, indexées par un ensemble I et telles que :*

- *pour tout objet c de $\mathcal{C}$ et tout élément $x \in F(c)$, il existe un indice $i \in I$ et un morphisme de $\mathcal{C}$*

  $$f : c_i \longrightarrow c \qquad [\textit{resp.} \quad f : c \longrightarrow c_i\ ]$$

  vérifiant la condition

  $$F(f)(x_i) = x\,.$$

(ii) *Pour que F soit représentable, il suffit que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfasse les deux conditions suivantes :*

- *Elle admet une famille d'objets $(c_i)_{i\in I}$ qui est coséparante [resp. séparante] au sens que, pour tous objets c et d de $\mathcal{C}$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(d,c) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i\in I} \prod_{f_i\in\mathrm{Hom}(c,c_i)} \mathrm{Hom}(d,c_i)\,, \\ f & \longmapsto & (f_i\circ f)_{i\in I,f_i} \end{array}$$

[resp.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(c,d) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i\in I} \prod_{f_i\in\mathrm{Hom}(c_i,c)} \mathrm{Hom}(c_i,d)\,, \\ f & \longmapsto & (f\circ f_i)_{i\in I,f_i}\ ] \end{array}$$

est injective.

- *Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, la collection de ses sous-objets [resp. de ses quotients] c'est-à-dire des classes d'équivalence de monomorphismes $c'\to c$ [resp. d'épimorphismes $c\to c'$] est un ensemble.*

Remarque :

Les notions de monomorphisme et d'épimorphisme ont été définies dans la remarque (ii) qui suit la définition II.2.1.

Deux monomorphismes $c_1\to c$ et $c_2\to c$ [resp. deux épimorphismes $c\to c_1$ et $c\to c_2$] sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme (nécessairement unique) $c_1 \xrightarrow{\sim} c_2$ qui rend commutatif le triangle

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[dr] \arrow[dd, "\wr"'] & \\ & c \\ c_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \text{[resp.} \quad \begin{tikzcd} & c_1 \arrow[dd, "\wr"] \\ c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c_2 \end{tikzcd} \quad].$$

Exemples :

(i) Si $\mathcal{C}$ est la catégorie Ens des ensembles ou plus généralement la catégorie $\widehat{\mathcal{A}} = [\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ des préfaisceaux sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{C}$ admet à la fois une famille séparante et une famille coséparante et les collections des sous-objets et des objets quotients de tout objet de $\mathcal{C}$ sont des ensembles.

Pour le voir, on peut supposer que $\mathcal{A}$ est une petite catégorie.

La famille des objets représentables de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$y(a) = \mathrm{Hom}(\bullet, a)\,, \qquad a\in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,,$$

est séparante car, pour tout objet F de $\mathcal{C}=\widehat{\mathcal{A}}$, l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y(a),F)$$

s'identifie à $F(a)$.

D'autre part, la famille des objets de $\mathcal{C}=\widehat{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{rcl} F_a : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ b & \longmapsto & \{0,1\}^{\mathrm{Hom}(a,b)} = \displaystyle\prod_{f\in\mathrm{Hom}(a,b)} \{0,1\} \end{array}$$

indexée par les objets a de $\widehat{\mathcal{A}}$ est coséparante.

En effet, considérons deux objets F et G de $\widehat{\mathcal{A}}$ et deux morphismes

$$F \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G\,.$$

Si ces deux morphismes α et β sont distincts, il existe un objet a de $\mathcal{A}$, un élément $x \in F(a)$ et une partie I de $G(a)$ tels que

$$\alpha_a(x) \in I \qquad \text{et} \qquad \beta_a(x) \notin I\,.$$

Soit alors $\gamma : G \to F_a$ le morphisme défini par la famille des applications indexées par les objets b de $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_b : G(b) & \longrightarrow & F_a(b) = \{0,1\}^{\mathrm{Hom}(a,b)}\,, \\ y & \longmapsto & \left[\mathrm{Hom}(a,b) \ni f \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } G(f)(y) \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\right]. \end{array}$$

Il est clair que les deux composés $\gamma \circ \alpha$ et $\gamma \circ \beta$ sont distincts, ce qui montre que la famille des F_a est coséparante.

Enfin, pour tout objet $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ de $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}$, les sous-objets de F consistent en des familles de sous-ensembles des ensembles $F(a)$, $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, et les objets quotients de F consistent en des familles d'ensembles quotients des ensembles $F(a)$. Il en résulte comme voulu que la collection des sous-objets de F et celle de ses objets quotients sont des ensembles.

Ainsi, pour toute catégorie de préfaisceaux $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}$, un foncteur contravariant [resp. covariant]

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad [\text{resp.} \quad F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ]$$

est représentable si et seulement si il transforme les colimites en limites [resp. il respecte les limites].

On peut ajouter la remarque que si $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable par un objet $\overline{F} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ de $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}$, alors $\overline{F}$ est le composé

$$\overline{F} = F \circ y : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ y\ } \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ F\ } \mathrm{Ens}$$

puisque, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, on a

$$F(y(a)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y(a), \overline{F}) = \overline{F}(a)\,.$$

(ii) De même, si $\mathcal{C}$ est la catégorie Top des espaces topologiques, un foncteur contravariant [resp. covariant]

$$F : \mathrm{Top}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad [\text{resp.} \quad F : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ]$$

est représentable si et seulement si il transforme les colimites en limites [resp. il respecte les limites].

En effet, l'espace à un élément $\{0\}$ est séparant dans Top et l'espace à deux éléments $\{0,1\}$ muni de la topologie triviale est coséparant.

De plus, pour tout espace topologique X, tout monomorphisme $Y \to X$ identifie l'ensemble sous-jacent de Y à une partie de celui de X et tout épimorphisme $X \to Y$ identifie l'ensemble sous-jacent de Y à un ensemble quotient de celui de X. Il en résulte que la collection des sous-objets de X et celle de ses sous-objets quotients sont des ensembles.

Démonstration de la proposition :

Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, il suffit de traiter le cas d'un foncteur contravariant

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,.$$

On dispose de la catégorie localement petite $\int F$ dont les objets sont les paires (c,x) constituées d'un objet c de $\mathcal{C}$ et d'un élément $x \in F(c)$, et dont les morphismes

$$(c,x) \longrightarrow (d,y)$$

sont les morphismes de $\mathcal{C}$

$$f : c \longrightarrow d$$

tels que $F(f)(y) = x$.

On observe que F est représentable si et seulement si la catégorie $\int F$ admet un objet final.

Comme la catégorie $\mathcal{C}$ a des colimites arbitraires et le foncteur F transforme les colimites en limites, la catégorie $\int F$ a des colimites arbitraires et le foncteur canonique

$$\begin{array}{ccc} \int F & \longrightarrow & \mathcal{C}\,, \\ (c,x) & \longmapsto & c \end{array}$$

respecte les colimites. En particulier, pour tout épimorphisme de $\int F$

$$(c,x) \longrightarrow (d,y)\,,$$

la flèche induite $c \to d$ est un épimorphisme de $\mathcal{C}$ et l'application $F(d) \to F(c)$ est injective. Il en résulte que si la collection des objets quotients de tout objet de la catégorie $\mathcal{C}$ est un ensemble, il en est de même dans la catégorie $\int F$.

Enfin, si une famille $(c_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ est séparante, alors la familles des (c_i, x), $i \in I$, $x \in F(c_i)$, est séparante dans la catégorie $\int F$.

Ainsi, la proposition est ramenée au lemme suivant :

Lemme VIII.1.2. –

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite qui admet des petites limites [resp. colimites] arbitraires.

Alors :

(i) *Pour que $\mathcal{C}$ admette un objet initial [resp. final], il faut et il suffit qu'existe une famille $(c_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ telle que tout objet c de $\mathcal{C}$ admet au moins une flèche $c_i \to c$ de l'un des c_i dans c [resp. $c \to c_i$ vers l'un des c_i].*

(ii) *Pour que $\mathcal{C}$ admette un objet initial [resp. final], il suffit que $\mathcal{C}$ satisfasse les deux conditions suivantes :*

- *Elle admet une famille coséparante [resp. séparante] d'objets.*
- *Pour tout objet de $\mathcal{C}$, la collection de ses sous-objets [resp. de ses quotients] est un ensemble.*

Démonstration du lemme :

Il suffit de traiter le cas où $\mathcal{C}$ admet des petites limites arbitraires.

(i) La condition est évidemment nécessaire puisque si $\mathcal{C}$ possède un objet initial c_0, tout objet c de $\mathcal{C}$ admet un (unique) morphisme $c_0 \to c$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}$ possède une famille d'objets $(c_i)_{i\in I}$ telle que tout objet c de $\mathcal{C}$ admette au moins un morphisme $c_i \to c$.

Soit

$$d = \prod_{i\in I} c_i$$

l'objet produit muni de ses projections $p_i : d \to c_i$ et soit $e \xrightarrow{j} d$ l'égalisateur de tous les endomorphismes $d \to d$ de d.

On prétend que tout objet c de $\mathcal{C}$ admet une unique flèche

$$e \longrightarrow c\,.$$

Pour l'existence, il existe par hypothèse un indice $i \in I$ et une flèche $c_i \to c$ donc aussi une flèche composée $e \xrightarrow{j} d \xrightarrow{p_i} c_i \longrightarrow c$.

Pour l'unicité, considérons deux flèches

$$e \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} c$$

et leur égalisateur $e' \xrightarrow{k} e$. Il existe un indice i et une flèche $c_i \xrightarrow{\ell} e'$ qui définit un endomorphisme de d

$$j \circ k \circ \ell \circ p_i : d \xrightarrow{p_i} c_i \xrightarrow{\ell} e' \xrightarrow{k} e \xrightarrow{j} d\,.$$

Comme e est l'égalisateur de tous les endomorphismes de d, on a

$$j \circ k \circ \ell \circ p_i \circ j = j$$

puis, comme j est un monomorphisme,

$$k \circ \ell \circ p_i \circ j = \mathrm{id}_e\,.$$

Or, on a par définition de $e' \xrightarrow{k} e$

$$f \circ k = g \circ k$$

d'où l'on déduit

$$f = g\,.$$

(ii) Partant d'une famille coséparante $(c_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, on forme leur produit $d = \prod\limits_{i \in I} c_i$ muni de ses projections canoniques $p_i : d \to c_i$. Par hypothèse, les sous-objets $d' \to d$ de d forment un ensemble. Cet ensemble est muni de la relation d'ordre partiel qui consiste à noter

$$(d' \longrightarrow d) \leq (d'' \longrightarrow d)$$

lorsqu'il existe un morphisme (nécessairement unique) $d' \to d''$ qui rend commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} d' \arrow[rr] \arrow[dr] & & d'' \arrow[dl] \\ & d & \end{tikzcd}$$

La limite du diagramme constitué de tous les sous-objets

$$d' \longrightarrow d$$

est un sous-objet

$$e \xrightarrow{j} d$$

qui est plus petit que tout sous-objet $d' \to d$ de d.

On prétend que tout objet c de $\mathcal{C}$ admet une unique flèche

$$e \longrightarrow c\,.$$

Pour l'unicité, considérons deux flèches

$$e \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} c\,.$$

Leur égalisateur $e' \to e$ est un sous-objet de e et donc de d. Par minimalité de e, on a nécessairement $e' = e$ et donc $f = g$.

Pour l'existence, considérons le produit

$$q = \prod_{i \in I} \prod_{f \in \mathrm{Hom}(c, c_i)} c_i$$

muni de ses projections $p_{i,f} : q \to c_i$ et du morphisme

$$c \xrightarrow{k} q$$

tel que $p_{i,f} \circ k = f$, $\forall i \in I$, $\forall\, f \in \mathrm{Hom}(c, c_i)$.

Comme la famille $(c_i)_{i \in I}$ est coséparante, le morphisme

$$c \xrightarrow{k} q$$

est un monomorphisme.

Considérons alors la flèche

$$e \xrightarrow{\ell} q$$

telle que $p_{i,f} \circ \ell = p_i \circ j$, $\forall i \in I$, $\forall\, f \in \mathrm{Hom}(c, c_i)$.

Puis formons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} e' \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d, "k"] \\ e \arrow[r, "\ell"'] & q \end{tikzcd}$$

Comme $k : c \to q$ est un monomorphisme, $e' \to e$ est un sous-objet de e et donc de d. Par minimalité de e, on a $e' = e$. D'où comme voulu un morphisme $e \to c$.

Cela termine la démonstration du lemme et donc aussi celle de la proposition.

□

On déduit de la proposition VIII.1.1 :

Corollaire VIII.1.3. –

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite qui admet des petites limites [resp. colimites] arbitraires.

Et soit

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

un foncteur vers une catégorie localement petite $\mathcal{D}$ qui respecte les limites [resp. les colimites].

Alors :

(i) *Pour que F admette un adjoint à gauche [resp. à droite], il faut et il suffit que l'on puisse associer à tout objet d de $\mathcal{D}$ une famille $(c_i)_{i \in I_d}$ d'objets de $\mathcal{C}$ munis de morphismes $f_i : d \to F(c_i)$ [resp. $f_i : F(c_i) \to d$] de $\mathcal{D}$ telle que, pour tout objet c de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $f : d \to F(c)$ [resp. $f : F(c) \to d$], il existe un indice $i \in I_d$ et un morphisme $g : c_i \to c$ [resp. $g : c \to c_i$] de $\mathcal{C}$ tels que $f = F(g) \circ f_i$ [resp. $f = f_i \circ F(g)$].*

(ii) *Pour que F admette un adjoint à gauche [resp. à droite], il suffit que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfasse les deux conditions suivantes :*

- *Elle possède une famille d'objets qui est séparante [resp. coséparante].*
- *Pour tout objet de $\mathcal{C}$, la collection de ses sous-objets [resp. de ses objets quotients] est un ensemble.*

Remarque :

Il résulte de ce corollaire que si $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite qui

- a des petites limites [resp. colimites] arbitraires,
- possède une famille d'objets séparante [resp. coséparante]
- satisfait la condition que la collection des sous-objets [resp. des objets quotients] de tout objet est un ensemble,

alors la catégorie $\mathcal{C}$ a aussi des petites colimites [resp. limites] arbitraires.

En effet, pour tout petit diagramme D, le foncteur diagonal

$$\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow D\text{-diag}(\mathcal{C})$$

respecte les limites [resp. les colimites].

Cette remarque explique le constat que, le plus souvent, une catégorie qui a des limites [resp. colimites] arbitraires a aussi des colimites [resp. limites] arbitraires.

Exemples :

(i) Si $\mathcal{C}$ est la catégorie $\widehat{\mathcal{A}} = [\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]$ des préfaisceaux sur une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$, tout foncteur

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

vers une catégorie localement petite $\mathcal{D}$ qui respecte les limites [resp. les colimites] admet un adjoint à gauche [resp. à droite].

(ii) Il en est de même si $\mathcal{C}$ est la catégorie Top des espaces topologiques.

Démonstration du corollaire :

Quitte à remplacer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ par $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$, il suffit de traiter le cas où $\mathcal{C}$ a des limites arbitraires et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ respecte les limites.

La condition de (i) est nécessaire car, si F admet un adjoint à gauche G, alors pour tout objet d de $\mathcal{D}$, la famille constituée de l'objet $G(d)$ de $\mathcal{C}$ muni du morphisme $d \to F(G(d))$ qui correspond au morphisme $\mathrm{id}_{G(d)} : G(d) \to G(d)$ possède la propriété requise.

Reste à montrer que les conditions de (i) ou (ii) sont suffisantes.

On sait déjà d'après la proposition VIII.1.1 que, pour tout objet d de $\mathcal{D}$, le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ c & \longmapsto & \mathrm{Hom}(d, F(c)) \end{array}$$

est représentable.

Pour conclure, il suffit de vérifier que l'on peut choisir pour chaque tel objet d de $\mathcal{D}$ un objet $G(d)$ de $\mathcal{C}$ qui représente ce foncteur.

Cela résulte du procédé de construction donné dans la démonstration des parties (i) ou (ii) de la proposition VIII.1.1 et de ce que la catégorie $\mathcal{C}$ est munie par hypothèse de foncteurs

$$\varprojlim_{D} : D\text{-diag}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

associés à tous les petits diagrammes D. $\square$

b) Sites et topos de Grothendieck

Les résultats du sous-paragraphe précédent et des deux derniers chapitres font apparaître que les catégories $\widehat{\mathcal{A}}$ de préfaisceaux sur des catégories essentiellement petites $\mathcal{A}$ partagent des propriétés qui permettent de réaliser dans ces catégories la plupart des constructions possibles dans la catégorie des ensembles.

Grothendieck a introduit une classe bien plus générale de catégories qui possèdent ces propriétés et sont caractérisées par elles, les topos.

Leur définition est constructive et repose sur celle de faisceau sur un site :

Définition VIII.1.4. –

Un topos est une catégorie qui admet une équivalence avec la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur au moins un site $(\mathcal{A}, J)$, au sens de la définition qui suit.

Définition VIII.1.5. –

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie petite (ou localement petite).

(i) *On appelle crible d'un objet a de $\mathcal{A}$ un ensemble (ou une collection) C de flèches de $\mathcal{A}$ de but a*

$$b \longrightarrow a$$

tel que, pour tout triangle commutatif de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} b' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & & b \arrow[dl, "f"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

on a l'implication

$$f \in C \Longrightarrow f \circ g \in C\,.$$

(ii) *Pour toute flèche $\alpha : a' \to a$ de $\mathcal{A}$, on appelle image réciproque par α d'un crible C de a le crible $\alpha^* C$ de a' constitué des flèches*

$$f' : b' \longrightarrow a'$$

telles que $\alpha \circ f' : b' \to a$ soit élément du crible C.

(iii) *On appelle topologie (de Grothendieck) de $\mathcal{A}$ toute application*

$$J : a \longmapsto J(a)$$

qui associe à tout objet a de $\mathcal{A}$ une partie $J(a)$ de l'ensemble des cribles de a et satisfait les trois axiomes suivants :

(Maximalité) Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, le crible "maximal" de a constitué de toutes les flèches $b \to a$ de but a est élément de $J(a)$.

(Stabilité) Pour tout morphisme $\alpha : a' \to a$ de $\mathcal{A}$ et tout $C \in J(a)$ on a $\alpha^* C \in J(a')$.

(Transitivité) Pour tout objet a de $\mathcal{A}$ et tout crible $C \in J(a)$, un crible C' de a est dans $J(a)$ dès que $f^* C' \in J(b)$ pour toute flèche $b \xrightarrow{f} a$ de C.

(iv) *On appelle site la donnée d'une catégorie $\mathcal{A}$ petite ou essentiellement petite et d'une topologie (de Grothendieck) J sur $\mathcal{A}$.*

(v) *On appelle faisceau sur un tel site $(\mathcal{A}, J)$ tout préfaisceau*

$$F : \mathcal{A}^{\rm op} \longrightarrow {\rm Ens}$$

tel que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$ et tout $C \in J(a)$, l'application canonique

$$F(a) \longrightarrow \varprojlim_{(f:b\to a)\,\in\, C} F(b)$$

soit une bijection.

(vi) *On appelle catégorie des faisceaux sur un tel site $(\mathcal{A}, J)$ la sous-catégorie pleine*

$$\widehat{\mathcal{A}}_J \quad \textit{de} \quad \widehat{\mathcal{A}} = [\mathcal{A}^{\rm op}, {\rm Ens}]$$

constituée des préfaisceaux $\mathcal{A}^{\rm op} \to {\rm Ens}$ qui sont des faisceaux.

Remarques :

(i) Si $\mathcal{A}$ est une catégorie essentiellement petite équivalente à une petite catégorie $\mathcal{A}'$, et que a et a' sont deux objets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ qui se correspondent par cette équivalence, alors les cribles de a dans $\mathcal{A}$ sont en bijection avec les cribles de a' dans $\mathcal{A}'$. C'est pourquoi les cribles de a dans $\mathcal{A}$ forment un ensemble.

(ii) Toute intersection (et toute réunion) de cribles d'un objet a de $\mathcal{A}$ est un crible de a. En particulier, toute famille de flèches $f_i : b_i \to a$ engendre un crible de a, qui est le plus petit des cribles de a contenant cette famille : il est constitué des flèches $b \to a$ qui se factorisent à travers l'une au moins des flèches $f_i : b_i \to a$.

(iii) Dans un site $(\mathcal{A}, J)$, les cribles d'un objet a de $\mathcal{A}$ qui sont dans $J(a)$ sont appelés les cribles J-couvrants de a ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur J, les cribles couvrants de a.

Une famille de flèches $f_i : b_i \to a$ est dite couvrante si le crible qu'elle engendre est couvrant.

(iv) Dans un site $(\mathcal{A}, J)$, tout morphisme de faisceaux

$$F_1 \longrightarrow F_2$$

est par définition un morphisme de préfaisceaux de F_1 vers F_2.

(v) On observe que, pour tout objet a d'une catégorie localement petite $\mathcal{A}$, un crible de a n'est pas autre chose qu'un sous-objet du préfaisceau $y(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$.

Exemples :

(i) Si $\mathcal{A}$ est un monoïde c'est-à-dire compte un unique objet a, un crible de a est une partie C de $M = {\rm End}(a)$ telle que

$$m \in C \Longrightarrow m\, m' \in C\,, \qquad \forall\, m' \in M\,.$$

Par exemple, si M est le monoïde multiplicatif des entiers ≥ 1 un crible de M est une partie C qui contient les multiples de tout élément de C. La notion de crible de Grothendieck généralise donc celle de crible arithmétique (comme le crible d'Eratosthène constitué des entiers qui admettent au moins un diviseur non trivial).

(ii) Dans un monoïde M, une topologie est une famille J de cribles telle que :

$$\begin{cases} \bullet \quad M \text{ est élément de } J, \\ \bullet \quad \text{pour tout } C \in J \text{ et tout } m \in M, \text{ le crible} \\ \qquad\qquad m^*C = \{m' \in M \mid mm' \in C\} \\ \quad\;\; \text{est également élément de } J, \\ \bullet \quad \text{pour tout } C \in J, \text{ tout crible } C' \text{ tel que} \\ \qquad\qquad m^*C' \in J\,, \quad \forall\, m \in M\,, \\ \quad\;\; \text{est également élément de } J. \end{cases}$$

(iii) Dans une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$, on définit une topologie de Grothendieck en décidant que l'unique crible couvrant de tout objet a de $\mathcal{A}$ est le crible maximal constitué de toutes les flèches $b \to a$ de but a.

On l'appelle la topologie triviale (ou discrète) de $\mathcal{A}$.

Pour cette topologie, les notions de préfaisceau et de faisceau sur $\mathcal{A}$ se confondent.

(iv) Supposons que dans une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$, tout triangle

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ a' \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

se complète en un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} b' \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ a' \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

Alors on peut définir une topologie sur $\mathcal{A}$ en décidant que tout crible non vide d'un objet a est couvrant.

On l'appelle la topologie atomique.

(v) Soit X un espace topologique.

Soit $\mathcal{A}_X$ la petite catégorie dont les objets sont les ouverts de X et dont les morphismes $U \to V$ sont les inclusions $U \subset V$ entre ouverts considérés comme des parties de X.

Disons qu'un crible d'un objet U composé d'inclusions $U_i \subset U$ est couvrant si U est la réunion des U_i.

Cela définit une topologie sur la catégorie $\mathcal{A}_X$. De plus, la notion de faisceau sur $\mathcal{A}_X$ pour cette topologie coïncide avec celle de faisceau sur X (à valeurs dans la catégorie Ens des ensembles) introduite dans la définition IV.2.1.

(vi) Plus généralement, considérons une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$ et une classe $\mathcal{M}$ de morphismes de $\mathcal{A}$ telle que :

- les isomorphismes sont dans $\mathcal{M}$ et le composé de deux morphismes de $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{M}$,

- pour tout diagramme de changement de base

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ a' \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

  dont la flèche $b \to a$ est dans $\mathcal{M}$, le produit fibré $b \times_a a'$ est représentable dans $\mathcal{A}$ et le morphisme $b \times_a a' \to a'$ est dans $\mathcal{M}$,

- pour toute famille de morphismes de $\mathcal{M}$

$$a_i \to a\,, \quad i \in I\,,$$

  qui est couvrante au sens que, pour tout morphisme $a' \to a$ dont la source a' est "non vide" (c'est-à-dire n'est pas un objet initial de $\mathcal{A}$), l'un au moins des produits fibrés $a_i \times_a a'$ est non vide, un morphisme de $\mathcal{A}$

$$b \longrightarrow a$$

  est dans $\mathcal{M}$ s'il en est ainsi de tous les morphismes $a_i \times_a b \to a_i$, $i \in I$, induits par changement de base.

Alors il existe une topologie sur $\mathcal{A}$ dont les cribles couvrants sont les cribles engendrés par les familles de morphismes de $\mathcal{M}$

$$a_i \longrightarrow a\,, \quad i \in I\,,$$

qui sont couvrantes au sens ci-dessus.

On peut l'appeler la $\mathcal{M}$-topologie de $\mathcal{A}$. $\square$

c) Le foncteur de faisceautisation

L'étude des topos de Grothendieck est fondée sur l'existence du procédé suivant de construction de faisceaux :

Proposition VIII.1.6. –

Soit $(\mathcal{A}, J)$ un site.

(i) *On dispose d'un foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}\,, \\ F & \longmapsto & F^+ \end{array}$$

qui associe à tout préfaisceau F le préfaisceau F^+ défini en tout objet a de $\mathcal{A}$ par la formule

$$F^+(a) = \varinjlim_{C \in J(a)} \left(\varprojlim_{(b \to a) \in C} F(b) \right).$$

(ii) *Si $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un faisceau, alors $F^+ = F$.*

(iii) *Si $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un préfaisceau "séparé" au sens que, pour tout crible couvrant C d'un objet a de $\mathcal{A}$, l'application*

$$F(a) \longrightarrow \varprojlim_{(b \to a) \in C} F(b)$$

est injective, alors F^+ est un faisceau.

(iv) *Pour tout préfaisceau $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, F^+ est un préfaisceau séparé.*

(v) *Le foncteur pleinement fidèle de plongement des faisceaux dans les préfaisceaux*

$$j_* : \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$$

admet pour adjoint à gauche le foncteur dit de "faisceautisation"

$$\begin{array}{rcl} j^* : \widehat{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}_J \,, \\ F & \longmapsto & (F^+)^+ \,. \end{array}$$

(vi) *Le foncteur $j^* : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ respecte non seulement les colimites arbitraires mais aussi les limites finies.*

(vii) *Le morphisme canonique*

$$j^* \circ j_* \longrightarrow \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}$$

est un isomorphisme.

Démonstration :

Commençons par remarquer que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, l'ensemble $J(a)$ de ses cribles couvrants est ordonné par l'inclusion. Il résulte des axiomes de stabilité et de transitivité de la topologie J que l'intersection de deux cribles couvrants est encore un crible couvrant. L'ensemble ordonné $J(a)$ est donc filtrant.

(i) Pour toute flèche $\alpha : a' \to a$ de $\mathcal{A}$, tout crible couvrant C de a induit le crible couvrant $\alpha^* C$ de a' et donc, pour tout préfaisceau $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, une application

$$\varprojlim_{(b \to a) \in C} F(b) \longrightarrow \varprojlim_{(b' \to a') \in \alpha^*(C)} F(b) \,.$$

Ces applications définissent alors une application

$$F^+(a) \longrightarrow F^+(a')$$

ce qui signifie que F^+ est un préfaisceau $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$.

Il est évident que cette construction transforme tout morphisme de préfaisceaux $F \to G$ en un morphisme $F^+ \to G^+$.

(ii) Si F est un faisceau, on a pour tout crible couvrant C d'un objet a de $\mathcal{A}$ une identité

$$F(a) = \varprojlim_{(b \to a) \in C} F(b)$$

et donc $F^+ = F$.

(iv) Soient $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ un préfaisceau quelconque, C un crible couvrant d'un objet a de $\mathcal{A}$ et x_1, x_2 deux éléments de $F^+(a)$ qui ont même image dans

$$\varprojlim_{(b \to a) \in C} F^+(b) \,.$$

Il existe un crible couvrant C' de a tel que x_1, x_2 soient les images de deux éléments

$$y_1, y_2 \in \varprojlim_{(b \to a) \in C'} F(b) \,.$$

Puis il existe un crible couvrant $C'' \subset C \cap C'$ de a tel que y_1 et y_2 aient même image dans

$$\varprojlim_{(b \to a) \in C''} F(b)\,.$$

Cela prouve que le préfaisceau F^+ est séparé.

(iii) Soit F un préfaisceau séparé.

D'après (iv) qui est déjà démontré, on sait que F^+ est séparé.

Il reste à prouver que pour tout crible couvrant C d'un objet a, l'application

$$F^+(a) \longrightarrow \varprojlim_{(b \to a) \in C} F^+(b)$$

est surjective.

Soit donc un élément x de $\varprojlim\limits_{(b \to a) \in C} F^+(b)$.

Pour toute flèche $f : b \to a$ de C, il existe un crible couvrant C_f de b tel que l'image x_f de x dans $F^+(b)$ provienne d'un élément

$$y_f \in \varprojlim_{(b' \to b) \in C_f} F(b')\,.$$

Soit C' le crible de a constitué de tous les composés $b' \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ d'une flèche $f : b \to a$ de C et d'une flèche $g : b' \to b$ de C_f. Pour toute flèche $f : b \to a$ de C on a $f^* C' \supset C_f$ et donc le crible C' de a est couvrant.

Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
b'_1 \arrow[r, "g_1"] & b_1 \arrow[dr, "f_1"] & \\
 & & a \\
b'_2 \arrow[uu, "h"] \arrow[r, "g_2"'] & b_2 \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $f_1, f_2 \in C$, $g_1 \in C_{f_1}$ et $g_2 \in C_{f_2}$, les éléments $x_{f_1} \in F^+(b_1)$ et $x_{f_2} \in F^+(b_2)$ ont même image dans $F^+(b'_2)$. Comme F est séparé, on en déduit que l'image de y_{f_1} dans $F(b'_1)$ est envoyée par $F(h)$ sur l'image de y_{f_2} dans $F(b'_2)$.

Donc les y_f définissent un élément y de $\varprojlim\limits_{(b' \to a) \in C'} F(b')$ et donc de $F^+(a)$ dont l'image dans $\varprojlim\limits_{(b \to a) \in C} F^+(b)$ est égale à x.

(v) Il résulte de (iii) et (iv) que le foncteur

$$F \longmapsto F^{++} = (F^+)^+$$

transforme tout préfaisceau en un faisceau.

D'autre part, il résulte de (ii) que tout morphisme

$$F \longrightarrow G$$

d'un préfaisceau F dans un faisceau G se factorise canoniquement en

$$F \longrightarrow F^+ \longrightarrow G$$

puis en

$$F \longrightarrow F^+ \longrightarrow F^{++} \longrightarrow G\,.$$

Cela montre que le foncteur

$$F \longmapsto F^{++} = j^*F$$

est un adjoint à gauche de $j_* : \widehat{\mathcal{A}}_J \to \widehat{\mathcal{A}}$.

(vi) Le foncteur j^* respecte les colimites arbitraires puisque c'est un adjoint à gauche.

D'autre part, il respecte les limites finies car il en est ainsi du foncteur

$$F \longmapsto F^+\,.$$

En effet, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, le foncteur

$$F \longmapsto F^+(a) = \varinjlim_{C \in J(a)} \ \varprojlim_{(b \to a) \in C} F(b)$$

respecte les limites finies puisque les foncteurs de limites $\varprojlim\limits_{(b \to a) \in C}$ respectent les limites arbitraires et que le foncteur de colimite filtrante

$$\varinjlim_{C \in J(a)}$$

respecte les limites finies dans la catégorie Ens des ensembles.

(vii) résulte de (ii) et de la formule $j^*(F) = F^{++}$ ou, tout simplement, de ce que le foncteur $j_* : \widehat{\mathcal{A}}_J \to \widehat{\mathcal{A}}$ est pleinement fidèle.

$\square$

d) Les propriétés catégoriques essentielles des topos

Le théorème suivant montre que les topos de Grothendieck ont les mêmes propriétés catégoriques constructives que la catégorie Ens des ensembles et les catégories $\widehat{\mathcal{A}}$ de préfaisceaux :

Théorème VIII.1.7. –

Tout topos $\mathcal{E}$ possède les propriétés suivantes :

(i) *La petitesse locale :*

(0) *$\mathcal{E}$ est une catégorie localement petite.*

(ii) *Les propriétés de cocomplétude :*

(1) *$\mathcal{E}$ a des colimites arbitraires, au sens que pour tout petit carquois D le foncteur diagonal*

$$\Delta : \mathcal{E} \longrightarrow D\text{-diag}\,(\mathcal{E})$$

a un adjoint à gauche

$$\varinjlim_{D} : D\text{-diag}\,(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

De plus, si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{A}, J)$, ce foncteur $\varinjlim\limits_{D}$ est le composé du plongement

$$j_* : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}_J) \longrightarrow D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}})$$

du foncteur $\varinjlim\limits_{D}$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{rcl} \varinjlim : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}\,, \\ F_\bullet & \longmapsto & \varinjlim\limits_{D} F_\bullet = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \to & \mathrm{Ens}\,, \\ a & \mapsto & \varinjlim\limits_{D} F_\bullet(a) \end{bmatrix} \end{array}$$

et du foncteur de faisceautisation

$$j^* : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J\,.$$

(2) *$\mathcal{E}$ admet une famille séparante d'objets.*

Plus précisément, si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la catégorie des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J, alors les images des objets de $\mathcal{A}$ par le foncteur canonique

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{\ y\ } \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{\ j^*\ } \widehat{\mathcal{A}}_J$$

forment une famille séparante de $\mathcal{E}$.

(3) *Pour tout objet e de $\mathcal{E}$, ses "quotients" c'est-à-dire les classes d'isomorphie d'épimorphismes*

$$e \longrightarrow e'$$

forment un ensemble.

(iii) *Les propriétés de complétude :*

(4) *$\mathcal{E}$ a des limites arbitraires, au sens que pour tout petit carquois D le foncteur diagonal*

$$\Delta : \mathcal{E} \longrightarrow D\text{-diag}\,(\mathcal{E})$$

a un adjoint à droite

$$\varprojlim\limits_{D} : D\text{-diag}\,(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

De plus, si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{A}, J)$, on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}_J) \arrow[r, "\varprojlim\limits_{D}"] \arrow[d, "j_*"'] & \widehat{\mathcal{A}}_J \arrow[d, "j_*"] \\ D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}) \arrow[r, "\varprojlim\limits_{D}"] & \widehat{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

Autrement dit, le foncteur $\varprojlim\limits_{D}$ de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la restriction du foncteur

$$\begin{array}{rcl} \varprojlim\limits_{D} : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}\,, \\ F_\bullet & \longmapsto & \varprojlim\limits_{D} F_\bullet = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \to & \mathrm{Ens}\,, \\ a & \mapsto & \varprojlim\limits_{D} F_\bullet(a) \end{bmatrix}. \end{array}$$

(5) *$\mathcal{E}$ admet une famille coséparante d'objets.*

(6) *Pour tout objet e de $\mathcal{E}$, ses "sous-objets" c'est-à-dire les classes d'isomorphie de monomorphismes*

$$e' \hookrightarrow e$$

forment un ensemble.

(iv) *La propriété de balancement :*

(7) *$\mathcal{E}$ est une catégorie "balancée" au sens qu'une flèche de $\mathcal{E}$*

$$e \longrightarrow e'$$

est un isomorphisme si et seulement si elle est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

(v) *La correspondance entre quotients et relation d'équivalence :*

(8) *Dans $\mathcal{E}$, toute relation d'équivalence d'un objet e*

$$R \hookrightarrow e \times e$$

est effective au sens que si l'on note

$$\overline{e} = \varinjlim (R \rightrightarrows e)\,,$$

alors le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d] \\ e \arrow[r] & \overline{e} \end{tikzcd}$$

est aussi cartésien.

(9) *Réciproquement, pour tout épimorphisme*

$$e \longrightarrow \overline{e}$$

et sa relation d'équivalence associée $R = e \times_{\overline{e}} e$, le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d] \\ e \arrow[r] & \overline{e} \end{tikzcd}$$

est aussi cocartésien et l'on a $\overline{e} = \varinjlim (R \rightrightarrows e)$.

(vi) *La propriété que les sommes sont disjointes :*

(10) *Dans $\mathcal{E}$, le carré associé à tous objets e_1, e_2 et à l'objet initial $\emptyset$*

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & e_1 \arrow[d] \\ e_2 \arrow[r] & e_1 \amalg e_2 \end{tikzcd}$$

est cartésien.

(vii) *Les deux propriétés d'échange entre limites et colimites :*

(11) *Pour tout morphisme $e' \to e$ de $\mathcal{E}$, le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}/e & \longrightarrow & \mathcal{E}/e'\,, \\ x & \longmapsto & x \times_e e' \end{array}$$

respecte les colimites arbitraires.

(12) *Pour toute petite catégorie filtrante $\mathcal{D}$, le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{D}, \mathcal{E}] & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ e_\bullet & \longmapsto & \varinjlim_{\mathcal{D}} e_\bullet \end{array}$$

respecte les limites finies.

(viii) *L'existence des foncteurs exponentiels :*

(13) *Pour tout morphisme $e' \to e$ de $\mathcal{E}$, le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}/e & \longrightarrow & \mathcal{E}/e\,, \\ (x \to e) & \longmapsto & (x \times_e e' \to e) \end{array}$$

admet un adjoint à droite

$$(y \to e) \longmapsto \mathcal{H}om_e(y, e')\,.$$

De plus, si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la catégorie des faisceaux sur un site $(\mathcal{A}, J)$, alors pour tout morphisme de faisceaux $y \to e$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, l'ensemble

$$\mathcal{H}om_e(y, e')(a)$$

est celui des morphismes

$$y_{|a} \longrightarrow e'_{|a}$$

entre les restrictions $y_{|a}$ et $e'_{|a}$ de y et e' à la catégorie relative $\mathcal{A}/a$ qui respectent les morphismes induits vers la restriction $e_{|a}$ de e.

(ix) *Le classificateur des sous-objets :*

(14) *Le foncteur contravariant*

$$\mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

qui associe à tout objet e l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet Ω de $\mathcal{E}$ muni d'un sous-objet

$$1 \hookrightarrow \Omega$$

qui s'identifie à l'objet final 1 de $\mathcal{E}$.

De plus, si $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}$ [resp. $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$] est la catégorie des préfaisceaux [resp. des faisceaux] sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ [resp. munie d'une topologie J], alors pour tout objet a de $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\Omega(a)$$

est celui des cribles de a [resp. des cribles C qui sont J-fermés au sens que pour toute flèche $b \xrightarrow{f} a$ de $\mathcal{A}$ et tout crible couvrant $C' \in J(b)$, on a $f \in C$ si $f \circ g \in C$, $\forall\, (b' \xrightarrow{g} b) \in C'$].

L'unique élément de $\Omega(a)$ qui appartient au sous-objet 1 de Ω est le crible maximal de a.

Remarques :

(i) On dit que deux propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ des catégories sont duales l'une de l'autre si une catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété $\mathcal{P}_1$ lorsque la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ possède la propriété $\mathcal{P}_2$ et réciproquement.

On note que les propriétés (0) et (7) sont auto-duales.

Les propriétés (4), (5) et (6) sont duales des propriétés (1), (2) et (3).

On peut montrer que la catégorie Ens des ensembles, les catégories $\widehat{\mathcal{A}}$ de préfaisceaux et enfin tous les topos vérifient aussi les duales des propriétés (8), (9) et (10).

En revanche, la catégorie Ens ne vérifie pas les duales des propriétés (11), (12), (13) ou (14).

Ainsi, les foncteurs

$$A \longmapsto A \amalg I$$

ne respectent pas les produits dans Ens et, a fortiori, ils n'admettent pas d'adjoints à gauche.

De même, les limites filtrantes dans Ens ne respectent pas les épimorphismes ni a fortiori les colimites finies. Par exemple, pour tout nombre premier p, les homomorphismes

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\,\mathbb{Z}\,, \quad n \geq 1\,,$$

sont surjectifs mais pas leur limite filtrante

$$\mathbb{Z} = \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p\,.$$

Par conséquent, la catégorie opposée $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ de celle des ensembles n'est pas un topos et, en dehors du cas du topos trivial, l'opposé $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ d'un topos $\mathcal{E}$ n'est pas un topos.

(ii) Il résulte de la formule de (13) que si $e' \to e$ est un morphisme de faisceaux sur un site $(\mathcal{A}, J)$ et y un préfaisceau sur $\mathcal{A}$ muni d'un morphisme $y \to j_*\,e$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{j_*e}(y, j_*e') \xrightarrow{\sim} j_*\mathcal{H}om_e(j^*y, e')\,.$$

(iii) Dans le topos des faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}_J$ sur un site $(\mathcal{A}, J)$, tout sous-objet d'un faisceau dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ peut être vu comme un sous-objet dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Si Ω et Ω_J désignent les objets de $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}}_J$ qui représentent les foncteurs des sous-objets, ils sont donc reliés par un morphisme canonique

$$j_*\Omega_J \longrightarrow \Omega$$

et a fortiori par son composé

$$\Omega_J \longrightarrow j^*\Omega\,.$$

En général, ce n'est pas un isomorphisme.

(iv) Les "classificateurs des sous-objets" Ω des topos et leurs structures naturelles (induites par les opérations sur les sous-objets que sont les réunions, les intersections et le passage aux complémentaires) ont été très étudiés par W. Lawvere et son école.

En fait, l'existence de ces objets Ω classifiant les sous-objets est déjà mentionnée en passant dans SGA4 :

Le paragraphe 6.11 de l'exposé V introduit un objet qui représente le foncteur qui associe à tout objet S d'un topos $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-topos fermés du topos localisé $\mathcal{E}/S$. Comme les sous-topos fermés sont par définition les complémentaires des sous-topos ouverts et que les sous-topos ouverts de $\mathcal{E}/S$ sont associés par définition aux sous-objets de S, cela revient à classifier les sous-objets.

D'autre part, l'exercice 9.4.7.b) de l'exposé IV dit que le foncteur qui associe à tout objet S d'un topos $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-topos $\mathcal{E}/S$ est représentable.

La partie c) du même exercice dit que la condition pour un sous-topos d'un $\mathcal{E}/S$ d'être ouvert ou fermé est locale relativement aux familles épimorphiques $(S_i \to S)$. Bien que cela ne soit pas dit explicitement, cela signifie que les sous-topos ouverts ou fermés, donc les sous-objets, sont classifiés par un sous-objet Ω du classifiant des sous-topos introduit dans la partie b) de l'exercice.

Le sens de cette remarque apparaîtra clairement dans la suite : la notion de sous-topos est introduite dans ce chapitre au paragraphe 2.a) et étudiée au paragraphe 2.c), les topos localisés $\mathcal{E}/S$ d'un topos $\mathcal{E}$ en les objets S de $\mathcal{E}$ sont introduits et étudiés au paragraphe 2.d), enfin la notion de sous-topos ouvert associé à un sous-objet est introduite dans le lemme VIII.2.4 (iii) et celle de sous-topos fermé dans la remarque (iv) qui suit ce lemme.

Les remarques (vii) et (viii) après le lemme VIII.2.3 expliquent en quoi associer aux topos les ensembles de leurs sous-topos définit un foncteur contravariant, ce qui donne un sens au problème de représentabilité des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Ens}\,, \\ S &\longmapsto \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}/S\}\,. \end{aligned}$$

Exemples :

(i) Si G est un groupe et $\mathcal{E} = BG = \widehat{G^{\mathrm{op}}}$ est le topos des ensembles munis d'une action de G, alors pour tous objets X, Y de BG, l'objet exponentiel

$$Y^X = \mathcal{H}om(X,Y)$$

est l'ensemble des applications

$$f : X \to Y$$

muni de l'action des éléments $g \in G$ définie par la formule

$$(g,f) \longmapsto g \cdot f = [X \ni x \longmapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot x)]\,.$$

(ii) Plus généralement, si M est un monoïde et $\mathcal{E} = BM = \widehat{M^{\mathrm{op}}}$ est le topos des ensembles munis d'une action de M, alors pour tous objets X, Y de BM, l'objet exponentiel

$$Y^X = \mathcal{H}om(X,Y)$$

est l'ensemble des familles d'applications

$$(f_m : X \longrightarrow Y)_{m \in M}$$

telles que

$$m' \cdot f_{mm'}(x) = f_m(m' \cdot x)\,, \quad \forall\, m, m' \in M\,, \quad \forall\, x \in X\,,$$

muni de l'action des éléments n de M définie par

$$n \cdot (f_m)_{m \in M} = (f_{nm})_{m \in M}\,.$$

On observe que le foncteur d'oubli de l'action de M

$$BM \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

respecte la formation des exponentielles si et seulement si M est un groupe.

(iii) Pour tout monoïde M, l'objet Ω du topos BM qui représente le foncteur des sous-objets est l'ensemble des cribles de M^{op}, c'est-à-dire des parties C de M stables par multiplication à gauche par des éléments arbitraires de M, muni de l'action des éléments n de M définie par

$$(n, C) \longmapsto n^* C = \{m \in M \mid mn \in C\}\,.$$

Il compte deux éléments, le crible maximal et le crible vide, si et seulement si M est un groupe.

Démonstration :

On observe que toutes les propriétés à démontrer sont préservées par équivalence de catégories.

On peut donc supposer que $\mathcal{E}$ est la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J.

(0) Comme $\mathcal{A}$ est petite, $\widehat{\mathcal{A}}$ est localement petite donc aussi sa sous-catégorie pleine $\widehat{\mathcal{A}}_J$.

(1) Pour tout D-diagramme de faisceaux

$$e_\bullet : D \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$$

et tout faisceau e, se donner un morphisme de D-diagrammes

$$e_\bullet \longrightarrow \Delta(e)$$

équivaut à se donner un morphisme de préfaisceaux

$$\left(\varinjlim_D e_\bullet\right) \longrightarrow e$$

donc à se donner un morphisme de faisceaux

$$j^*\left(\varinjlim_D e_\bullet\right) \longrightarrow e\,.$$

(2) Un morphisme de faisceaux

$$e \longrightarrow e'$$

est entièrement caractérisé par la famille des applications

$$e(a) \longrightarrow e'(a)\,, \quad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,.$$

Or ces applications s'écrivent encore

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a), e) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a), e')\,.$$

(4) Pour tout petit carquois D, le foncteur

$$\varprojlim_D : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$$

respecte la sous-catégorie pleine $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux car ceux-ci sont définis par les conditions de limites

$$F(a) = \varprojlim_{(a'\to a)\in C} F(a')\,, \quad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,, \quad \forall\, C \in J(a)\,,$$

et le foncteur de limite $\varprojlim_D$ respecte toutes les limites.

Alors la restriction

$$\varprojlim_D : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}_J) \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$$

de $\varprojlim_D : D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}) \to \widehat{\mathcal{A}}$ est un adjoint à droite de $\Delta : \widehat{\mathcal{A}}_J \to D\text{-diag}\,(\widehat{\mathcal{A}}_J)$ car $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{A}}$.

(6) Les sous-ensembles de tout ensemble forment un ensemble donc les sous-objets de tout objet de $\widehat{\mathcal{A}}$ forment un ensemble. Alors les sous-objets de tout objet e de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ forment un sous-ensemble de l'ensemble des sous-objets de e vu comme un préfaisceau c'est-à-dire un objet de $\widehat{\mathcal{A}}$.

(7) Une application entre deux ensembles est une bijection si et seulement si elle est à la fois une injection et une surjection. Ainsi, la propriété est vérifiée dans Ens puis dans la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}$ des préfaisceaux.

Considérons une flèche de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\alpha : e \longrightarrow e'$$

qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Cette flèche peut être vue comme un monomorphisme de $\widehat{\mathcal{A}}$ et on peut former la colimite e'' du diagramme

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] \arrow[d] & e' \\ e' & \end{tikzcd}$$

dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Le carré commutatif de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] \arrow[d] & e' \arrow[d] \\ e' \arrow[r] & e'' \end{tikzcd}$$

est à la fois cartésien et cocartésien, donc aussi son image dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & e' \arrow[d, "p_1"] \\ e' \arrow[r, "p_2"'] & j^* e'' \end{tikzcd}$$

par le foncteur de faisceautisation j^*.

Comme α est un épimorphisme de $\widehat{\mathcal{A}}_J$, on en déduit $p_1 = p_2$.

Comme ce carré est cartésien, on conclut que α est un isomorphisme.

(8), (9), (10), (11) et (12) sont vérifiées dans la catégorie Ens des ensembles, donc aussi dans la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}$ des préfaisceaux sur $\mathcal{A}$ puisque les foncteurs de limites et de colimites y sont calculés par évaluation en chaque objet a de $\mathcal{A}$ et calcul dans Ens.

Une relation d'équivalence R d'un objet e de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ peut être vue comme une relation d'équivalence de e considéré comme objet de $\widehat{\mathcal{A}}$. Son quotient $e'' = \varinjlim (R \rightrightarrows e)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$ s'inscrit dans un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d] \\ e \arrow[r] & e'' \end{tikzcd}$$

qui est à la fois cartésien et cocartésien dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Son image par le foncteur de faisceautisation j^* est le carré

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d] \\ e \arrow[r] & e' \end{tikzcd}$$

qui est donc à la fois cartésien et cocartésien dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$.

C'est la propriété (8).

Pour (9), associons à un épimorphisme $e \to e'$ de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ la relation d'équivalence $R = e \times_{e'} e$ puis son quotient $e'' = \varinjlim (R \rightrightarrows e)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Le morphisme canonique

$$e'' \longrightarrow e'$$

est un monomorphisme de $\widehat{\mathcal{A}}$ puisque, en chaque objet a de $\mathcal{A}$, $e''(a)$ est le sous-ensemble de $e'(a)$ image de l'application $e(a) \to e'(a)$.

Par conséquent, son image par le foncteur de faisceautisation j^*

$$j^* e'' \longrightarrow e'$$

est un monomorphisme de $\widehat{\mathcal{A}}_J$. C'est aussi un épimorphisme puisque son composé avec $e \to j^* e''$ est l'épimorphisme $e \to e'$. D'après la propriété (7) déjà démontrée, $j^* e'' \to e'$ est un isomorphisme et e' est le quotient dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ de e par la relation d'équivalence R.

C'est la propriété (9).

(10) résulte de ce que, pour tous objets e_1 et e_2 de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ vus comme des objets de $\widehat{\mathcal{A}}$, le carré cartésien et cocartésien de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & e_1 \arrow[d] \\ e_2 \arrow[r] & e_1 \amalg e_2 \end{tikzcd}$$

est transformé par le foncteur j^* en le carré de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & e_1 \arrow[d] \\ e_2 \arrow[r] & e_1 \amalg e_2 \end{tikzcd}$$

qui donc est à la fois cartésien et cocartésien.

Les propriétés (11) et (12) déjà connues dans $\widehat{\mathcal{A}}$ restent vraies dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ du fait que le foncteur de faisceautisation $j^* : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ respecte à la fois les colimites arbitraires et les limites finies.

(3) résulte de (8) et (9) combinées avec (6) qui disent que se donner un quotient d'un objet e de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ équivaut à se donner un sous-objet R de $e \times e$ qui vérifie les axiomes de la théorie des relations d'équivalence.

Pour (8), il faut vérifier que, pour tout faisceau y muni d'une flèche $y \to e$, le préfaisceau

$$\mathcal{H}om_e(y, e') : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est un faisceau et qu'il représente le foncteur

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{E}/e)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ x & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{e'}(x \times_e e', y)\,. \end{array}$$

Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}om_e(y, e')(a)$ est par définition l'ensemble des morphismes de préfaisceaux

$$y(a) \times_e e' \longrightarrow y$$

compatibles avec les morphismes vers e'. Notant $\ell = j^* \circ y$, c'est aussi l'ensemble des morphismes de faisceaux

$$\ell(a) \times_e e' \longrightarrow y$$

compatibles avec les morphismes vers e'.

Comme le foncteur

$$x \longmapsto x \times_e e'$$

respecte les colimites, la propriété que $\mathcal{H}om_e(y, e')$ est un faisceau et celle qu'il représente le foncteur $x \mapsto \mathrm{Hom}_{e'}(x \times_e e', y)$ résultent des deux parties du lemme suivant :

Lemme VIII.1.8. –

Soient $(\mathcal{A}, J)$ un site, $\widehat{\mathcal{A}}_J$ le topos des faisceaux sur ce site et

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J$$

le foncteur canonique.

Alors :

(i) *Pour toute famille de flèches $(a_i \to a)_{i \in I}$ de $\mathcal{A}$ engendrant un crible C, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(A) *Cette famille est couvrante, autrement dit le crible C est élément de $J(a)$.*

(B) *On a dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ la formule*

$$\ell(a) = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} \ell(a') \,.$$

(C) *La famille de flèches $(\ell(a_i) \to \ell(a))_{i \in I}$ de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est globalement épimorphique.*

(D) *L'objet $\ell(a)$ de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est la colimite du diagramme constitué par les objets $\ell(a_i)$ et les objets $\ell(a')$ munis des flèches $\ell(a') \to \ell(a_i)$ et $\ell(a') \to \ell(a_j)$ associés aux carrés commutatifs de $\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_i \arrow[d] \\ a_j \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

(ii) *Tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ s'écrit canoniquement comme la colimite*

$$F = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} \ell(a)$$

calculée sur la catégorie $\int F$ des éléments de F considéré comme un préfaisceau $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to$ Ens.

Démonstration du lemme :

(i) Pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, on a

$$F(a) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}}(y(a), j_* F) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a), F) \,.$$

Par conséquent, si C est un crible couvrant d'un objet a, la formule vérifiée par tout faisceau F

$$F(a) = \varprojlim_{(a' \to a) \in C} F(a')$$

signifie que l'on a dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ la formule

$$\ell(a) = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} \ell(a') \,.$$

Cela montre que (A) implique (B).

Il est évident que (B) implique (C).

Enfin, si (C) est vérifiée, il résulte de la propriété (9) déjà démontrée que $\ell(a)$ est la colimite dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ du diagramme constitué par les $\ell(a_i)$ et les $\ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j)$ reliés par les projections

$$\ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j) \longrightarrow \ell(a_i) \qquad \text{et} \qquad \ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j) \longrightarrow \ell(a_j) \,.$$

Or, pour tous indices i, j, on a

$$\ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j) = j^*(y(a_i) \times_{y(a)} y(a_j))$$

et donc $\ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j)$ admet une famille globalement épimorphique de flèches

$$\ell(a') \longrightarrow \ell(a_i) \times_{\ell(a)} \ell(a_j)$$

induites par des objets a' de $\mathcal{A}$ munis de flèches de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$y(a') \longrightarrow y(a_i) \times_{y(a)} y(a_j)$$

c'est-à-dire par des carrés commutatifs de $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_i \arrow[d] \\ a_j \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

Cela montre que (C) implique (D).

Il est évident que (D) implique (A).

(ii) On sait déjà d'après le lemme VI.1.6 (i) que tout préfaisceau F vérifie dans $\widehat{\mathcal{A}}$ la formule

$$F = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} y(a) \,.$$

Si F est un faisceau, on en déduit la formule de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$F = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} \ell(a)$$

puisque le foncteur j^* respecte les colimites. $\square$

Fin de la démonstration du théorème VIII.1.7 :

La propriété (13) étant démontrée grâce au lemme ci-dessus, il reste seulement à prouver les propriétés (14) et (5).

Pour (14), commençons par observer que dans la catégorie Ens le foncteur qui associe à tout ensemble la famille de ses sous-ensembles est représentable par l'ensemble $\{0,1\}$ à deux éléments : en effet, se donner un sous-ensemble E' d'un ensemble E équivaut à se donner sa fonction caractéristique $\mathbb{I}_{E'} : E \to \{0,1\}$.

Par conséquent, ce foncteur transforme les colimites en limites.

Il en résulte que le foncteur qui associe à tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble de ses sous-objets transforme les colimites en limites.

Puis cette propriété se transporte de $\widehat{\mathcal{A}}$ à $\widehat{\mathcal{A}}_J$. En effet, si F est la colimite d'un diagramme $F_\bullet : D \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ et F' est un sous-objet de F dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$, alors F' est la colimite des $F' \times_F F_d$, $d \in \mathrm{Ob}(D)$, d'après la propriété (11) déjà démontrée. Réciproquement, si les F'_d, $d \in \mathrm{Ob}(D)$, sont des sous-objets des F_d dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ tels que, pour toute flèche $d_1 \to d_2$ de D, on ait $F'_{d_1} = F_{d_1} \times_{F_{d_2}} F'_{d_2}$, alors la colimite F' des F'_d dans $\widehat{\mathcal{A}}$ vérifie la formule

$$F'_d = F' \times_F F_d \,, \qquad \forall\, d \in \mathrm{Ob}(D) \,,$$

et donc sa colimite j^*F' dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ vérifie la formule

$$F'_d = j^*F' \times_F F_d \,, \qquad \forall\, d \,.$$

De cette propriété de commutation résulte que le préfaisceau sur $\mathcal{A}$ défini par la formule

$$a \longmapsto \Omega(a) = \text{ensemble des sous-objets de } \ell(a) \text{ dans } \widehat{\mathcal{A}}_J$$

est un faisceau et qu'il représente le foncteur des sous-objets.

Si J est la topologie discrète, alors pour tout objet a de $\mathcal{A}$, $\Omega(a)$ est l'ensemble des sous-objets de $y(a)$ c'est-à-dire l'ensemble des cribles de a.

Dans le cas général, on observe que l'application

$$(F \hookrightarrow \ell(a)) \longmapsto F \times_{\ell(a)} y(a)$$

définit une bijection de l'ensemble des sous-objets de $\ell(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ sur l'ensemble des sous-objets F' de $y(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$ tels que

$$F' = j^*F' \times_{\ell(a)} y(a)$$

c'est-à-dire sur l'ensemble des cribles J-fermés de a.

On conclut la preuve de (14) en observant que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, l'élément de $\Omega(a)$ qui correspond au sous-objet total $\ell(a)$ de $\ell(a)$ est le crible maximal.

Pour (5), montrons que dans le topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$ muni de son classificateur des sous-objets Ω, les exponentielles

$$\Omega^{\ell(a)} = \mathcal{H}om(\ell(a), \Omega) \,, \qquad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \,,$$

forment une famille coséparante.

Considérons en effet deux morphismes distincts

$$F_1 \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} F_2$$

entre deux faisceaux F_1 et F_2 de $\widehat{\mathcal{A}}_J$. Alors il existe un objet a de $\mathcal{A}$ et un élément $x \in F_1(a)$ tel que

$$u(x) \neq v(x) \,.$$

L'élément $y = u(x)$ de $F_2(a)$ définit un morphisme $\ell(a) \to F_2$ dont le graphe est un sous-objet de $\ell(a) \times F_2$ qui correspond à un morphisme

$$\ell(a) \times F_2 \longrightarrow \Omega$$

ou, ce qui revient au même,

$$F_2 \longrightarrow \Omega^{\ell(a)} .$$

Les composés de ce morphisme $F_2 \longrightarrow \Omega^{\ell(a)}$ avec u et v sont distincts, ce qui montre que la famille des $\Omega^{\ell(a)}$, $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, est coséparante.

Cela prouve (5) et achève la démonstration du théorème. □

e) La caractérisation des topos par leurs propriétés

Le théorème suivant montre que toute catégorie qui possède les propriétés (0)–(14) du théorème VIII.1.7 (et même seulement une partie de ces propriétés) est un topos de Grothendieck :

Théorème VIII.1.9. –

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie qui possède les propriétés suivantes :

(0) *$\mathcal{E}$ est localement petite.*

(1) *$\mathcal{E}$ a des colimites arbitraires.*

(2) *$\mathcal{E}$ admet une famille séparante d'objets.*

(4′) *$\mathcal{E}$ a des limites* finies *arbitraires.*

(8) *Les relations d'équivalence dans les objets de $\mathcal{E}$ sont effectives.*

(9) *Réciproquement, tout épimorphisme $e \to \overline{e}$ de $\mathcal{E}$ fait de $\overline{e}$ le quotient de e par la relation d'équivalence $R = e \times_{\overline{e}} e$.*

(11) *Les changements de base respectent les colimites arbitraires.*

Alors :

(i) *$\mathcal{E}$ est un topos.*

(ii) *Plus précisément, si $\mathcal{A}$ est une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets forment une famille séparante et que J est la topologie de $\mathcal{A}$ pour laquelle un crible C d'un objet a est couvrant si et seulement si*

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in f^* C} b' \quad \textit{pour toute flèche } f : b \to a \textit{ de } \mathcal{A},$$

alors la catégorie $\mathcal{E}$ est équivalente au topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur le site $(\mathcal{A}, J)$.

(iii) *Plus précisément encore, l'équivalence de* (ii) *est définie par les deux foncteurs*

$$\begin{array}{rcl} H : \mathcal{E} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}_J \, , \\ e & \longmapsto & \mathrm{Hom}(\bullet, e) = \begin{cases} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow \quad \mathrm{Ens} \, , \\ \quad a & \longmapsto \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(a, e) \, , \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} G : \widehat{\mathcal{A}}_J & \longrightarrow & \mathcal{E} \, , \\ F & \longmapsto & \varinjlim_{(a,x) \in \int F} a \, . \end{array}$$

En particulier, le foncteur H préserve les colimites.

Remarques :

(i) Ce théorème a été démontré par J. Giraud. Plus exactement, dans l'énoncé originel de Giraud, la condition (9) est remplacée par la condition (10) que les sommes soient disjointes. En fait, les deux énoncés sont équivalents.

(ii) Ce théorème montre en particulier que tout topos non trivial admet une infinité de présentations différentes comme topos des faisceaux sur des sites.

Démonstration :

La preuve de ce théorème comporte plusieurs étapes :

Etape 1 : J est une topologie.

L'axiome de stabilité est vérifié par définition de J.

L'axiome de maximalité est évident.

L'axiome de transitivité résulte de ce que toute colimite de colimites est une colimite.

Etape 2 : Construction du foncteur $H : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$.

On définit d'abord le foncteur

$$\begin{array}{rcl} H : \mathcal{E} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}\,, \\ e & \longmapsto & \mathrm{Hom}(\bullet, e) = \begin{cases} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ a & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(a, e)\,. \end{cases} \end{array}$$

Il est évident sur la définition des colimites et sur celle de J que, pour tout objet e de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Hom}(\bullet, e)$ est un faisceau.

Ainsi, H se factorise en

$$H : \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J\,.$$

Etape 3 : Construction du foncteur $G : \widehat{\mathcal{A}}_J \to \mathcal{E}$.

Partons du foncteur de plongement pleinement fidèle

$$\rho : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{E}\,.$$

D'après le lemme VI.1.6 (ii), ρ se factorise en un unique foncteur préservant les colimites

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

qui s'écrit

$$F \longmapsto \varinjlim_{(a,x)\in \int F} \rho(a) = \varinjlim_{(a,s)\in \int F} a\,.$$

Pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}$, le morphisme canonique de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$F \longrightarrow F^+$$

est transformé par $\widehat{\rho}$ en un isomorphisme de $\mathcal{E}$.

En effet, on a pour tout objet a de $\mathcal{A}$

$$F^+(a) = \varinjlim_{C\in J(a)} \varprojlim_{(a'\to a)\in C} F(a')$$

si bien que l'on est ramené à la formule

$$a = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} a'$$

que vérifie, par définition de la topologie J, tout crible couvrant $C \in J(a)$.

Par conséquent, le foncteur $\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}$ transforme tous les morphismes canoniques

$$F \longrightarrow F^+ \longrightarrow (F^+)^+ = j^* F$$

en des isomorphismes de $\mathcal{E}$, ce qui signifie que, à unique isomorphisme de foncteurs près, il se factorise en un foncteur

$$G : \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui prolonge $\rho : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{E}$ et préserve les colimites.

Etape 4 : Le foncteur $G : \widehat{\mathcal{A}}_J \to \mathcal{E}$ est adjoint à gauche de $H : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}_J}$.

En effet, on a pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}_J}$ et tout objet e de $\mathcal{E}$ la formule

$$\mathrm{Hom}(G(F), e) = \varprojlim_{(a,x) \in \int F} \mathrm{Hom}(a, e) = \mathrm{Hom}(F, \mathrm{Hom}(\bullet, e))$$

puisque

$$G(F) = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} a \qquad \text{dans } \mathcal{E}$$

et

$$F = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} y(a) \qquad \text{dans } \widehat{\mathcal{A}}.$$

Etape 5 : Le morphisme d'adjontion $G \circ H \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme.

En effet considérons un objet e de $\mathcal{E}$ et le faisceau $F = H(e) = \mathrm{Hom}(\bullet, e)$ qui lui est associé.

Il s'agit de prouver que le morphisme canonique de $\mathcal{E}$

$$\varinjlim_{(a,x) \in \int F} a \longrightarrow e$$

est un isomorphisme.

On sait déjà que e admet une famille globalement épimorphique de flèches

$$f_i : a_i \longrightarrow e$$

dont les sources sont des objets a_i de $\mathcal{A}$.

Si l'on note $e' = \coprod_i a_i$ et $R = e' \times_e e' = \coprod_{i,j} a_i \times_e a_j$, on sait que e est le quotient

$$\varinjlim (R \rightrightarrows e')$$

de e' par la relation d'équivalence R.

Pour tous indices i, j, il existe une famille globalement épimorphique de flèches

$$a_{i,j,k} \longrightarrow a_i \times_e a_j$$

dont les sources $a_{i,j,k}$ sont les objets de $\mathcal{A}$. Elles correspondent à des carrés commutatifs de $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} a_{i,j,k} \arrow[r] \arrow[d] & a_i \arrow[d, "f_i"] \\ a_j \arrow[r, "f_j"] & e \end{tikzcd}$$

Alors e est la colimite du diagramme constitué des a_i et des $a_{i,j,k}$ reliés par les flèches

$$a_i \longleftarrow a_{i,j,k} \longrightarrow a_j \,.$$

Comme ces flèches sont des flèches de la catégorie $\int F$, le morphisme

$$\varinjlim_{(a,x)\in\int F} a \longrightarrow e$$

est un isomorphisme.

Etape 6 : Le foncteur $H : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ préserve les familles globalement épimorphiques.

Autrement dit, une famille de morphismes de $\mathcal{A}$

$$f_i : a_i \longrightarrow a$$

est couvrante si et seulement si elle est globalement épimorphique dans $\mathcal{E}$.

La nécessité de la condition est évidente.

Pour la suffisance, si une telle famille est épimorphique, choisissons pour tous indices i, j une famille épimorphique de flèches

$$a_{i,j,k} \longrightarrow a_i \times_a a_j$$

dont les sources $a_{i,j,k}$ sont des objets de $\mathcal{A}$. Alors a est la colimite du diagramme des a_i et des $a_{i,j,k}$ reliés par les flèches

$$a_i \longleftarrow a_{i,j,k} \longrightarrow a_j$$

donc a fortiori du crible C engendré par les $a_i \to a$.

De plus, pour toute flèche $b \to a$ de $\mathcal{A}$, la famille des flèches de $\mathcal{E}$

$$b \times_a a_i \longrightarrow b$$

reste globalement épimorphique donc il existe une famille épimorphique de flèches de $\mathcal{E}$

$$b_j \longrightarrow b$$

dont les sources b_j sont des objets de $\mathcal{A}$ et qui s'inscrivent dans des carrés commutatifs de la forme :

$$\begin{tikzcd} b_j \arrow[r] \arrow[d] & a_i \arrow[d, "f_i"] \\ b \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

Alors b est la colimite du crible engendré par les $b_j \to b$ et ce crible est contenu dans f^*C si bien que l'on a

$$\varinjlim_{(b'\to b)\in f^*C} b' = b\,.$$

Cela signifie que le crible C engendré par les $a_i \to a$ est couvrant.

Etape 7 : La catégorie $\mathcal{E}$ est balancée.

Soit $u : e \to e'$ une flèche de $\mathcal{E}$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Son image $H(u) : H(e) \to H(e')$ est encore un monomorphisme puisque H, qui admet un adjoint à gauche, préserve les limites.

D'autre part, $H(u)$ est encore un épimorphisme puisque l'on a montré que H préserve les épimorphismes.

Donc $H(u)$ est un isomorphisme dans le topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$.

Comme le morphisme d'adjonction $G \circ H \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme, le foncteur $H : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ est pleinement fidèle et l'on conclut que $u : e \to e'$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$.

Etape 8 : Toute flèche $u : e \to e'$ se factorise canoniquement en un épimorphisme $u_1 : e \to \mathrm{Im}(u)$ suivi d'un monomorphisme $u_2 : \mathrm{Im}(u) \to e'$.

Soit $\mathrm{Im}(u)$ le quotient de e par la relation d'équivalence $R = e \times_{e'} e$.

Alors u se factorise canoniquement en

$$e \xrightarrow{u_1} \mathrm{Im}(u) \xrightarrow{u_2} e'$$

et u_1 est par construction un épimorphisme.

Il faut prouver que u_2 est un monomorphisme, c'est-à-dire que le morphisme diagonal

$$\Delta : \mathrm{Im}(u) \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \times_{e'} \mathrm{Im}(u)$$

est un isomorphisme.

On sait déjà que Δ est un monomorphisme.

De plus, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} R = e \times_{\mathrm{Im}(u)} e \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & e \times_{e'} e = R \arrow[d, "u_1 \times u_1"] \\ \mathrm{Im}(u) \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{Im}(u) \times_{e'} \mathrm{Im}(u) \end{tikzcd}$$

dont la flèche verticale $u_1 \times u_1$ est un épimorphisme.

Donc Δ est a fortiori un épimorphisme et, comme c'est aussi un monomorphisme, Δ est un isomorphisme.

Etape 9 : Le foncteur $H : \mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ préserve les colimites.

Soit $e_\bullet : D \to \mathcal{E}$ un D-diagramme de $\mathcal{E}$ et

$$e = \varinjlim_D e_\bullet \qquad \text{sa colimite dans } \mathcal{E}.$$

On sait déjà que le morphisme de $\mathcal{E}$

$$\varinjlim_D H(e_\bullet) \longrightarrow H(e)$$

est un épimorphisme.

Il faut montrer que c'est aussi un monomorphisme.

Soit

$$e' = \coprod_{d \in \mathrm{Ob}(D)} e_d \qquad \text{et} \qquad R = e' \times_e e' \,.$$

Pour tout diagramme fini $D_n = (d_0 \leftrightarrow d_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow d_n)$ constitué d'objets $d_0, d_1, \ldots, d_n$ de D et de flèches $d_{i-1} \to d_i$ ou $d_i \to d_{i-1}$ notées $d_{i-1} \leftrightarrow d_i$, on a un morphisme

$$\varprojlim_{D_n} e_\bullet \longrightarrow e_{d_0} \times e_{d_n}$$

d'où une flèche

$$\coprod_{D_n} \left(\varprojlim_{D_n} e_\bullet \right) \longrightarrow e' \times e' \,.$$

Son image est une relation d'équivalence, nécessairement égale à R puisqu'elle définit le quotient e de e'.

Donc la famille de flèches

$$\varprojlim_{D_n} e_\bullet \longrightarrow R$$

est globalement épimorphique dans $\mathcal{E}$.

Comme H préserve les limites arbitraires ainsi que les familles globalement épimorphiques, $H(R)$ est la relation d'équivalence de $H(e')$ qui définit son quotient $H(e)$ et la famille des flèches

$$\varprojlim_{D_n} H(e_\bullet) \longrightarrow H(R)$$

est globalement épimorphique.

Cela entraîne que le morphisme

$$\varinjlim_{D} H(e_\bullet) \longrightarrow H(e)$$

est un isomorphisme.

Etape 10 : Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{A}}_J} \to H \circ G$ est un isomorphisme.

Notant comme toujours ℓ le foncteur composé $\mathcal{A} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J$, on observe que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, $y(a) = \mathrm{Hom}(\bullet, a)$ est un faisceau et donc

$$H \circ G(\ell(a)) = H(a) = y(a) = \ell(a)\,.$$

Comme les foncteurs H et G préservent tous deux les colimites, la conclusion résulte de ce que, d'après le lemme VIII.1.8 (ii), tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ s'écrit

$$F = \varinjlim_{(a,x)\in\int F} \ell(a)\,.$$

Cela achève la démonstration du théorème. $\square$

f) Quelques conséquences des propriétés des topos

Les propriétés des topos énoncées dans la définition VIII.1.4 et le théorème VIII.1.7 ont les conséquences suivantes qui illustrent le fait général que presque toutes les constructions sont possibles dans les topos :

Corollaire VIII.1.10. –

Soit $\mathcal{E}$ un topos. Alors :

(i) *Un foncteur covariant [resp. contravariant]*

$$F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad [\textit{resp.} \quad F : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}\ ]$$

est représentable si et seulement si il respecte les limites [resp. transforme les colimites en limites].

(ii) *Plus généralement, un foncteur vers une catégorie localement petite $\mathcal{C}$*

$$F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$$

admet un adjoint à gauche [resp. à droite] si et seulement si il respecte les limites [resp. les colimites].

(iii) *Soit $\mathbb{T}$ une théorie algébrique [resp. cartésienne] définie par une petite catégorie $\mathcal{D}$ avec produits finis [resp. avec limites finies].*

Alors la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans le topos $\mathcal{E}$

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) = [\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{pr}} \qquad \textit{[resp.} \quad = [\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{car}}\ \textit{]}$$

admet des limites et des colimites arbitraires, et le foncteur de plongement

$$[\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{pr}} \longrightarrow [\mathcal{D},\mathcal{E}] \qquad \textit{[resp.} \quad [\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{car}} \longrightarrow [\mathcal{D},\mathcal{E}]\ \textit{]}$$

admet un adjoint à gauche $F \mapsto \widetilde{F} = F_{\mathrm{pr}}$ [resp. $= F_{\mathrm{car}}$].

Les foncteurs de limites dans $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$ sont les restrictions de ceux de $[\mathcal{D},\mathcal{E}]$, ce qui signifie qu'ils commutent avec les foncteurs d'évaluation en les objets de $\mathcal{D}$.

Les foncteurs de colimites dans $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$ sont les composés de ceux de $[\mathcal{D},\mathcal{E}]$ et du foncteur $F \mapsto \widetilde{F}$.

(iv) *Tout objet X de $\mathcal{E}$ admet un groupe interne de symétries, ce qui signifie que le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{Aut}_S(X \times S) \end{array}$$

est représentable dans $\mathcal{E}$ par un objet $\mathcal{A}ut(X)$.

Plus généralement, tout modèle $X_\bullet$ dans $\mathcal{E}$ d'une théorie algébrique [resp. cartésienne] $\mathbb{T}$ admet un groupe interne de symétries, ce qui signifie que le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{Aut}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}/S)}(X_\bullet \times S) \end{array}$$

est représentable dans $\mathcal{E}$ par un objet $\mathcal{A}ut(X_\bullet)$.

Plus généralement encore, si un tel modèle $X_\bullet$ induit un modèle $Y_\bullet$ d'une théorie algébrique [resp. cartésienne] $\mathbb{T}'$ via un foncteur entre leurs catégories de définition $\mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ qui respecte les produits finis [resp. les limites finies], alors il existe un groupe interne de symétries de $X_\bullet$ sur $Y_\bullet$ au sens que le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Aut}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}/S)}(X_\bullet \times S) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}/S)}(Y_\bullet \times S)\right] \end{array}$$

est représentable dans $\mathcal{E}$ par un objet $\mathcal{A}ut_{Y_\bullet}(X_\bullet)$.

(v) *Pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$, la catégorie*

$$\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$$

des actions $G \times X \to X$ de G sur des objets X de $\mathcal{E}$ a des limites et des colimites arbitraires. De plus, le foncteur d'oubli de l'action de G

$$\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathcal{E}$$

respecte les limites et les colimites.

Plus généralement, si $\mathbb{T}$ est une théorie algébrique [resp. cartésienne], la catégorie des $\mathbb{T}$-représentations de G dans $\mathcal{E}$

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)$$

a des limites et des colimites arbitraires, et leur formation est respectée par le foncteur d'oubli de l'action de G

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})\,.$$

Si $Y_\bullet$ *est un modèle dans* $\mathcal{E}$ *d'une autre théorie algébrique [resp. cartésienne]* $\mathbb{T}'$ *reliée à* $\mathbb{T}$ *par un foncteur entre leurs catégories de définition* $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ *qui respecte les produits finis [resp. les limites finies], la catégorie des* $\mathbb{T}$*-représentations de* G *dans* $\mathcal{E}$ *sur* Y

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$$

a des limites arbitraires, et leur formation est respectée par le foncteur

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)\,.$$

Si de plus α *admet un adjoint à gauche* $\beta : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$ *qui respecte les produits finis [resp. les limites finies], la catégorie*

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$$

a des colimites arbitraires, et leur formation est respectée par le foncteur

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)\,.$$

(vi) *Pour tout morphisme* $\rho : G \to G'$ *de groupes internes de* $\mathcal{E}$*, le foncteur de restriction des actions*

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathrm{coInd}_\rho : X \longmapsto \mathrm{coInd}_\rho(X) = \mathrm{coker}\,(G' \times G \times X \rightrightarrows G' \times X)$$

et un adjoint à droite

$$\mathrm{Ind}_\rho : X \longmapsto \mathrm{Ind}_\rho(X) = \ker\left(X^{G'} \rightrightarrows X^{G \times G'}\right)\,.$$

Plus généralement, si $\mathbb{T}$ *est une théorie algébrique [resp. cartésienne], le foncteur de restriction*

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathrm{coInd}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G')$$

et un adjoint à droite

$$\mathrm{Ind}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G')$$

tel que, pour tout objet d *de la catégorie de définition* $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ *de* $\mathbb{T}$*, les foncteurs d'évaluation en* d *définissent un carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_\rho"] \arrow[d, "{X_\bullet \mapsto X_d}"'] & \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G') \arrow[d, "{X'_\bullet \mapsto X'_d}"] \\
\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_\rho"'] & \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G')
\end{tikzcd}$$

Si $Y_\bullet$ *est un modèle dans* $\mathcal{E}$ *d'une autre théorie algébrique [resp. cartésienne]* $\mathbb{T}'$ *reliée à* $\mathbb{T}$ *par un foncteur* $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ *qui admet un adjoint à gauche* $\beta : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$ *respectant les produits finis [resp. les limites finies] et tel que le morphisme d'adjonction* $\beta \circ \alpha \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}_{\mathbb{T}'}}$ *soit un isomorphisme, le foncteur de restriction*

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$$

admet un adjoint à droite

$$\mathrm{Ind}_\rho : X_\bullet \longmapsto X'_\bullet = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{\mathbb{T}} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G) \\ d & \longmapsto & \mathrm{Ind}_\rho(X_d) \times_{\mathrm{Ind}_\rho(Y_{\beta(d)})} Y_{\beta(d)} \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbb{T}'$ est reliée à $\mathbb{T}$ par un foncteur $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ qui admet à la fois un adjoint à gauche $\beta : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$ respectant les produits finis [resp. les limites finies] et un adjoint à droite $\beta' : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$ tel que le morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_{\mathcal{D}_{\mathbb{T}'}} \to \beta' \circ \alpha$ soit un isomorphisme, le foncteur de restriction

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathrm{coInd}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G')\,.$$

Remarques :

(i) On verra un peu plus loin que pour tout objet S d'un topos $\mathcal{E}$, la catégorie relative $\mathcal{E}/S$ est encore un topos. Toutes les conclusions de ce corollaire s'appliquent donc à $\mathcal{E}/S$ aussi bien qu'à $\mathcal{E}$.

(ii) Dans le cas où $\mathbb{T}$ est la théorie algébrique des modules M sur un anneau A et $\mathbb{T}'$ la théorie des anneaux A, on a déjà vu que le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{T}}\,, \\ A & \longmapsto & A\,, \end{array}$$

admet pour adjoint à gauche et à droite le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \beta = \beta' : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}\,, \\ A & \longmapsto & A\,, \\ M & \longmapsto & 1\,. \end{array}$$

Les parties (v) et (vi) du corollaire s'appliquent donc sans restriction aux catégories de représentations linéaires à coefficients dans un anneau interne fixé d'un topos $\mathcal{E}$.

(iii) On verra dans la première définition du paragraphe suivant qu'un morphisme de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

consiste en une paire de foncteurs adjoints

$$f^* : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \qquad \text{et} \qquad f_* : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

dont la composante de gauche f^* respecte les limites finies.

Alors, pour toute théorie algébrique [resp. cartésienne] $\mathbb{T}$ définie par une catégorie avec produits finis [resp. avec limites finies] $\mathcal{D}$, la composition avec les foncteurs f^* et f_* des foncteurs

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

qui respectent les produits finis [resp. les limites finies] définit deux foncteurs

$$f^* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)$$

et

$$f_* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1) \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)$$

qui sont adjoints l'un de l'autre.

Dans le cas particulier où $\mathbb{T}$ est la théorie algébrique des anneaux, un topos $\mathcal{E}$ muni d'un anneau interne A c'est-à-dire d'un objet de $\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})$ est appelé un topos annelé $(\mathcal{E}, A)$.

Un morphisme de topos annelés
$$(\mathcal{E}_1, A_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, A_2)$$
consiste en un morphisme de topos
$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$
complété par un morphisme d'anneaux internes
$$A_2 \longrightarrow f_*\, A_1 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)$$
ou, ce qui revient au même,
$$f^*\, A_2 \longrightarrow A_1 \qquad \text{dans} \quad \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)\,.$$

(iv) Plus généralement, considérons deux théories algébriques [resp. cartésiennes] $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$ reliées par un foncteur entre leurs catégories de définition
$$\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$$
qui respecte les produits [resp. les limites finies], un morphisme de topos
$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$
et deux modèles $Y_{1,\bullet}$ et $Y_{2,\bullet}$ de $\mathbb{T}'$ dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reliés par un morphisme
$$Y_{2,\bullet} \longrightarrow f_*\, Y_{1,\bullet} \qquad \text{dans} \quad \mathbb{T}'\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)$$
ou, ce qui revient au même,
$$f^*\, Y_{2,\bullet} \longrightarrow Y_{1,\bullet} \qquad \text{dans} \quad \mathbb{T}'\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)\,.$$

Supposons que le foncteur $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ admet un adjoint à gauche
$$\beta : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$$
qui respecte les produits finis [resp. les limites finies] et dont le morphisme d'adjonction associé $\beta \circ \alpha \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}_{\mathbb{T}'}}$ est un isomorphisme.

Alors les catégories
$$\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)_{Y_{1,\bullet}} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{1,\bullet},\mathcal{E}_1}(1)$$
et
$$\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)_{Y_{2,\bullet}} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{2,\bullet},\mathcal{E}_2}(1)$$
des modèles de $\mathbb{T}$ dans les topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ dont les restrictions via $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ sont $Y_{1,\bullet}$ et $Y_{2,\bullet}$ sont reliées par le foncteur
$$\begin{array}{rcl} f_* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)_{Y_{1,\bullet}} & \longrightarrow & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)_{Y_{2,\bullet}}\,, \\ X_\bullet = [d \mapsto X_d] & \longmapsto & f_*\, X_\bullet = [d \mapsto f_*\, X_d \times_{f_* Y_{1,\beta(d)}} Y_{2,\beta(d)}]\,. \end{array}$$

Supposons enfin que le foncteur $\alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ admet aussi un adjoint à droite
$$\beta' : \mathcal{D}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{T}'}$$
dont le morphisme d'adjonction associé $\mathrm{id}_{\mathcal{D}_{\mathbb{T}'}} \to \beta' \circ \alpha$ est un isomorphisme.

Alors le morphisme
$$f_* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)_{Y_{1,\bullet}} \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)_{Y_{2,\bullet}}$$
admet un adjoint à gauche
$$f^* : \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)_{Y_{2,\bullet}} \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)_{Y_{1,\bullet}}$$
construit comme le composé du foncteur
$$\begin{array}{rcl} [D_{\mathbb{T}}, \mathcal{E}_1] & \longrightarrow & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1)\,, \\ F & \longmapsto & \widetilde{F} = F_{\rm pr} \quad \text{ou} \quad F_{\rm car} \end{array}$$
avec le foncteur
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2)_{Y_{2,\bullet}} & \longrightarrow & [D_{\mathbb{T}}, \mathcal{E}_1]\,, \\ X_\bullet = [d \mapsto X_d] & \longmapsto & X'_\bullet = [d \mapsto X'_d] \end{array}$$
où, pour tout objet d de $\mathcal{D}_{\mathbb{T}}$, X'_d désigne la colimite du diagramme :
$$\begin{tikzcd} & f^*\,X_d \\ f^*\,Y_{2,\beta'(d)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Y_{1,\beta'(d)} \end{tikzcd}$$
Toutes ces conditions sont réalisées en particulier lorsque $\mathbb{T}'$ est la théorie des anneaux et $\mathbb{T}$ la théorie des modules sur un anneau.

Si $(\mathcal{E}, A)$ est un topos annelé, $\mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})_A$ est aussi noté Mod_A et appelé la catégorie des modules internes sur l'anneau interne A de $\mathcal{E}$.

Tout morphisme de topos annelés
$$f = (f^*, f_*) : (\mathcal{E}_1, A_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, A_2)$$
induit deux foncteurs adjoints
$$f^* : \text{Mod}_{A_2} \longrightarrow \text{Mod}_{A_1}$$
et
$$f_* : \text{Mod}_{A_1} \longrightarrow \text{Mod}_{A_2}\,.$$
(v) Plus généralement encore, ajoutons aux données de (v)
$$\begin{cases} \alpha : \mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{T}}\,, \ \beta, \beta'\,, \\ f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2\,, \\ Y_{2,\bullet} \longrightarrow f_*\,Y_{1,\bullet}\,, \end{cases}$$
deux groupes internes G_1 et G_2 des topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reliés par un morphisme
$$G_2 \longrightarrow f_*\,G_1$$
ou, ce qui revient au même,
$$f^*\,G_2 \longrightarrow G_1\,.$$
Alors la formule
$$X_\bullet = [d \mapsto X_d] \longmapsto f_*\,X_\bullet = [d \mapsto f_*\,X_d \times_{f_* Y_{1,\beta(d)}} Y_{2,\beta(d)}]$$

définit un foncteur

$$f_* : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{1,\bullet},\mathcal{E}_1}(G_1) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{2,\bullet},\mathcal{E}_2}(G_2)$$

et celui-ci admet un adjoint à gauche

$$f^* : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{2,\bullet},\mathcal{E}_2}(G_2) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_{1,\bullet},\mathcal{E}_1}(G_1)\,.$$

Démonstration :

(i) et (ii) résultent de la proposition VIII.1.1 et du corollaire VIII.1.3 puisque tout topos possède à la fois une petite famille séparante d'objets (par définition des topos) et une petite famille coséparante (d'après le théorème VIII.1.7).

(iii) résulte du corollaire VI.2.2 (pour les limites), de la proposition VI.2.4 (pour l'existence d'un adjoint à gauche $F \mapsto \widetilde{F}$ du foncteur de plongement $[\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{pr}} \to [\mathcal{D},\mathcal{E}]$ ou $[\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\mathrm{car}} \to [\mathcal{D},\mathcal{E}]$) et du lemme VI.2.3 (pour les colimites). Les conditions de ces énoncés sont satisfaites puisqu'un topos $\mathcal{E}$ a des limites et colimites arbitraires, que les colimites y commutent aux changements de base (par définition des topos) et que les colimites filtrantes y respectent les limites finies (d'après le théorème VIII.1.7).

(iv) Les deux premières assertions résultent du lemme VII.1.3 (et des deux remarques qui le suivent) puisque le topos $\mathcal{E}$ a des limites arbitraires et que tous les objets y sont exponentiables.

La troisième et dernière assertion résulte de la seconde et du lemme VII.1.4.

(v) résulte du lemme VII.2.4 pour ce qui concerne l'existence de limites arbitraires dans les catégories $\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$, $\mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)$ et $\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$.

L'existence de colimites arbitraires dans les catégories $\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$ résulte du lemme VII.2.5. Enfin, l'existence de telles colimites dans les catégories $\mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)$ ou $\mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$ (sous l'hypothèse supplémentaire que le foncteur $\mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ admette un adjoint à gauche qui respecte les produits finis [resp. les limites finies]) résulte du lemme VII.2.7.

(vi) Il résulte de la proposition VII.2.8 que les foncteurs de restriction associés à un morphisme $\rho : G \to G'$ de groupes internes d'un topos $\mathcal{E}$

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$$

ont toujours un adjoint à gauche coInd_ρ et un adjoint à droite Ind_ρ.

Il en va de même des foncteurs

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T},\mathcal{E}}(G)$$

d'après les corollaires VII.2.10 (i) et VII.2.11 (i).

Enfin, l'existence d'adjoints à gauche coInd_ρ ou à droite Ind_ρ des foncteurs

$$\mathrm{Res}_\rho : \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G') \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{T}/Y_\bullet,\mathcal{E}}(G)$$

sous les hypothèses de l'énoncé au sujet du foncteur de changement de théorie $\mathcal{D}_{\mathbb{T}'} \to \mathcal{D}_{\mathbb{T}}$ résulte des corollaires VII.2.10 (ii) et VII.2.11 (ii).

□

2 Géométrie des topos

a) Morphismes de topos, points d'un topos et sous-topos

Grothendieck a généralisé aux topos les notions géométriques de fibration d'un espace sur un autre, de points d'un espace et de sous-espaces d'un espace :

Définition VIII.2.1. –

(i) *On appelle morphisme d'un topos* $\mathcal{E}_1$ *vers un topos* $\mathcal{E}_2$ *une paire* $f = (f^*, f_*)$ *de foncteurs* $f^* : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ *(dit "d'image réciproque") et* $f_* : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ *(dit "d'image directe") telle que*

- f^* *est adjoint à gauche de* f_*,
- f^* *respecte les limites finies.*

(ii) *On appelle point d'un topos* $\mathcal{E}$ *tout morphisme de topos*

$$\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

(iii) *On appelle plongement tout morphisme de topos*

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

dont la composante d'image directe $f_* : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ *est un foncteur pleinement fidèle. On dit alors que* $\mathcal{E}_1$ *muni de* f *est un sous-topos de* $\mathcal{E}_2$.

Remarques :

(i) La composante d'image réciproque $f^* = \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ de tout morphisme de topos $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ respecte les colimites arbitraires puisqu'elle admet un adjoint à droite. De même, la composante d'image directe $f_* : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ respecte les limites arbitraires.

Réciproquement, tout foncteur entre deux topos

$$\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

qui respecte les limites finies et les colimites arbitraires admet un adjoint à droite (unique à unique isomorphisme près), donc définit avec celui-ci un morphisme de topos $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$.

(ii) Deux morphismes de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $g = (g^*, g_*) : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ définissent par composition un morphisme de topos

$$g \circ f = (f^* \circ g^*, g_* \circ f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_3\,.$$

La loi de composition des morphismes de topos est associative.

(iii) Etant donnés deux morphismes d'un topos $\mathcal{E}_1$ vers un topos $\mathcal{E}_2$

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \qquad \text{et} \qquad g = (g^*, g_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2\,,$$

on peut appeler transformation de f vers g toute paire de morphismes de foncteurs

$$\alpha : f^* \longrightarrow g^* \qquad \text{et} \qquad \beta : g_* \longrightarrow f_*$$

tels que, pour tous objets e_1 de $\mathcal{E}_1$ et e_2 de $\mathcal{E}_2$, le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_1}(g^*(e_2), e_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_1}(\alpha_{e_2}, e_1)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_2}(e_2, g_*(e_1)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_2}(e_2, \beta_{e_1})"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_1}(f^*(e_2), e_1) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_2}(e_2, f_*(e_1))
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il résulte du lemme de Yoneda que se donner une telle paire de morphismes (α, β) équivaut à se donner un morphisme de foncteurs $\alpha : f^* \to g^*$ ou un morphisme de foncteurs $\beta : g_* \to f_*$.

Les transformations entre morphismes d'un topos $\mathcal{E}_1$ vers un topos $\mathcal{E}_2$ se composent. Par conséquent, les morphismes de topos de $\mathcal{E}_1$ vers $\mathcal{E}_2$ forment une catégorie que l'on notera $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]_g$.

Cette catégorie est localement petite puisque toute transformation

$$\left(f^* \xrightarrow{\alpha} g^*, g_* \xrightarrow{\beta} f_*\right)$$

est entièrement déterminée par les restrictions de α à des petites familles séparantes d'objets de $\mathcal{E}_2$.

Enfin, les deux foncteurs

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]_g & \longrightarrow & [\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1]\,, \\ f = (f^*, f_*) & \longmapsto & f^* \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]_g & \longrightarrow & [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]^{\mathrm{op}} \\ f = (f^*, f_*) & \longmapsto & f_* \end{array}$$

sont pleinement fidèles.

(iv) En particulier, les points de tout topos $\mathcal{E}$ forment une catégorie localement petite

$$[\mathrm{Ens}, \mathcal{E}]_g = \mathrm{pt}(\mathcal{E})\,.$$

Tout morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ induit par composition un foncteur

$$f_* : \mathrm{pt}(\mathcal{E}_1) \longrightarrow \mathrm{pt}(\mathcal{E}_2)\,.$$

(v) Tout topos $\mathcal{E}$ admet un morphisme de topos

$$p = (p^*, p_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}\,.$$

Il est unique à unique isomorphisme près et admet id pour unique transformation $p \to p$.

Si $1_{\mathcal{E}}$ désigne l'objet final de $\mathcal{E}$, sa composante d'image réciproque est

$$\begin{array}{rcl} p^* : \mathrm{Ens} & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ I & \longmapsto & \displaystyle\coprod_{i \in I} 1_{\mathcal{E}} \end{array}$$

tandis que sa composante d'image directe est

$$\begin{array}{rcl} p_* : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ e & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}}, e)\,. \end{array}$$

Le foncteur p^* respecte les limites finies car, dans un topos $\mathcal{E}$, les sommes sont disjointes et respectées par les changements de base.

Le foncteur $p_* : \mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ est appelé le foncteur des sections globales du topos $\mathcal{E}$. Il respecte les limites arbitraires (puisque c'est un adjoint à droite) mais ne respecte pas en général les colimites.

Les objets de $\mathcal{E}$ qui sont isomorphes à des images du foncteur

$$p^* : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$$

peuvent être appelés les objets constants de $\mathcal{E}$.

Pour tout morphisme de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \,,$$

le composé du foncteur d'image directe f_* avec le foncteur des sections globales de $\mathcal{E}_2$ est le foncteur des sections globales de $\mathcal{E}_1$ tandis que le foncteur d'image réciproque f^* envoie les objets constants $\mathcal{E}_2$ sur les objets constants de $\mathcal{E}_1$.

(vi) D'après la remarque (ii) qui suit le lemme III.1.2, un morphisme de topos $(f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est un plongement si et seulement si le morphisme d'adjonction

$$f^* \circ f_* \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{E}_1}$$

est un isomorphisme.

(vii) Pour tous topos $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ toute équivalence de catégories c'est-à-dire toute paire de foncteurs

$$\left(\mathcal{E}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{E}_1\right)$$

telle que $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{E}_1}$ et $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{E}_2}$ est un morphisme de topos appelé une équivalence de topos.

Il est naturel de considérer le plus souvent les topos à équivalence près.

Toute équivalence de topos

$$\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2$$

induit pour tout topos $\mathcal{E}$ des équivalences de catégories

$$\begin{array}{rccc} & [\mathcal{E}, \mathcal{E}_1]_g & \xrightarrow{\sim} & [\mathcal{E}, \mathcal{E}_2]_g \\ \text{et} & [\mathcal{E}_2, \mathcal{E}]_g & \xrightarrow{\sim} & [\mathcal{E}_1, \mathcal{E}]_g \,. \end{array}$$

En particulier, elle induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{pt}(\mathcal{E}_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt}(\mathcal{E}_2) \,.$$

De plus, son composé avec tout plongement de topos

$$\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}$$

est un plongement de topos

$$\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \,.$$

Le plus souvent, on appelle sous-topos d'un topos $\mathcal{E}$ les plongements de topos

$$\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$$

considérés à équivalence près.

Exemples :

(i) Cette triple définition est justifiée par le cas des espaces topologiques.

En effet, toute application continue

$$f : Y \longrightarrow X$$

entre deux espaces topologiques X et Y induit un morphisme de topos

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E}_Y \longrightarrow \mathcal{E}_X$$

entre les catégories de faisceaux sur X et Y. Sa composante d'image directe est le foncteur

$$\begin{array}{rcl} f_* : \mathcal{E}_Y & \longrightarrow & \mathcal{E}_X \, , \\ F & \longmapsto & f_* F = \big[X \supset U \longmapsto f_* F(U) = F(f^{-1}(U)) \big] \end{array}$$

qui transforme tout faisceau F sur Y en le faisceau $f_* F$ sur X qui associe à tout ouvert U de X l'image par F de l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U dans Y.

Il admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathcal{E}_X & \longrightarrow & \mathcal{E}_Y \, , \\ G & \longmapsto & f^* G = \left[Y \supset V \longmapsto f^* G(V) = \varinjlim\limits_{\substack{U \subset X \\ f^{-1}(U) \supset V}} G(U) \right] \end{array}$$

où, pour tout ouvert V de Y, la colimite des $G(U)$ est prise sur l'ensemble ordonné filtrant des ouverts U de X tels que $f^{-1}(U) \supset V$.

Le fait que $f^* G$ est un faisceau sur Y pour tout faisceau G sur X résulte de ce que, pour toute famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de Y de réunion V et tous ouverts U_i de X tels que

$$f^{-1}(U_i) \supset V_i \, , \qquad \forall \, i \in I \, ,$$

on a

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \supset V$$

et

$$f^{-1}(U_i \cap U_j) \supset V_i \cap V_j \, , \qquad \forall \, i,j \in I \, .$$

Le foncteur $f^* : \mathcal{E}_X \to \mathcal{E}_Y$ respecte les limites finies car les colimites filtrantes respectent les limites finies dans la catégorie Ens des ensembles.

En particulier, tout point x d'un espace topologique X définit un point

$$(x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}_X$$

du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur X. Sa composante d'image réciproque

$$\begin{array}{rcl} x^* : \mathcal{E}_X & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \, , \\ F & \longmapsto & \varinjlim\limits_{U \subset X, \, x \in U} F(U) \end{array}$$

est appelée le foncteur fibre en le point x.

Dans le cas où Y est un sous-espace de X c'est-à-dire où l'application

$$f : Y \to X$$

est injective et les ouverts de Y sont les images réciproques par f des ouverts de Y, le foncteur d'image directe

$$f_* : \mathcal{E}_Y \longrightarrow \mathcal{E}_X$$

est pleinement fidèle. Cela résulte de ce que, pour tout ouvert V de Y, l'ensemble des ouverts U de X tels que $f^{-1}(U) = V$ est non vide et filtrant.

Autrement dit, tout sous-espace

$$Y \hookrightarrow X$$

d'un espace topologique X définit un sous-topos

$$\mathcal{E}_Y \hookrightarrow \mathcal{E}_X$$

du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur X.

(ii) Si Y est un espace topologique irréductible au sens que toute intersection finie d'ouverts non vides de Y est un ouvert non vide, alors le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_Y & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ F & \longmapsto & \varinjlim\limits_{V\subset Y, V\neq\emptyset} F(V) \end{array}$$

définit un point du topos $\mathcal{E}_Y$ des faisceaux sur Y.

En effet, il respecte les limites finies puisque l'ensemble ordonné des ouverts non vides V de Y est filtrant et, d'autre part, il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens} & \longrightarrow & \mathcal{E}_Y\,, \\ I & \longmapsto & F_I = \left[Y \supset V \longmapsto \begin{cases} I & \text{si} \quad V \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si} \quad V = \emptyset \end{cases} \right]. \end{array}$$

En particulier, pour tout espace topologique X, tout sous-espace irréductible Y de X définit un point du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur X.

(iii) Réciproquement, tout point $(x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \to \mathcal{E}_X$ du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur un espace topologique X provient d'un sous-espace fermé irréductible $Y \hookrightarrow X$ de X.

En effet, tout ouvert U de X définit un objet $\ell(U)$ de $\mathcal{E}_X$ muni d'un monomorphisme $\ell(U) \to \ell(X)$ vers l'objet $\ell(X)$ qui est un objet final de $\mathcal{E}_X$. L'image $x^*\ell(X)$ de $\ell(X)$ par le foncteur x^* est l'objet final $\{1\}$ de Ens. Par conséquent, pour tout ouvert U de X, l'image $x^*\ell(U)$ est ou bien $\{1\}$ ou bien l'ensemble vide $\emptyset$. De plus, si $x^*\ell(U) = \emptyset$, on a a fortiori $x^*\ell(U') = \emptyset$ pour tout ouvert $U' \subset U$. Comme x^* respecte les colimites arbitraires, il existe un plus grand ouvert U_0 de X tel que $x^*\ell(U_0) = \emptyset$. Le sous-espace fermé $Y \hookrightarrow X$ de X complémentaire de U_0 est irréductible puisque, pour tous ouverts U_1, U_2 de X qui ne sont pas contenus dans U_0, le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} x^*\ell(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & x^*\ell(U_1) = \{1\} \arrow[d] \\ \{1\} = x^*\ell(U_2) \arrow[r] & x^*\ell(U_1 \cup U_2) = \{1\} \end{tikzcd}$$

impose que $x^*\ell(U_1 \cap U_2) = \{1\}$, autrement dit que $U_1 \cap U_2$ n'est pas contenu dans U_0. Pour tout faisceau F sur X, la formule

$$F = \varinjlim_{(U,a)\in\int F} \ell(U) = \varinjlim_{U\subset X, a\in F(U)} \ell(U)$$

implique

$$x^*F = \varinjlim_{U\subset X, a\in F(U)} x^*\ell(U)\,.$$

Comme on a pour tout ouvert U de X

$$x^*\ell(U) = \emptyset \qquad \text{si} \qquad U \cap Y = \emptyset$$

et

$$x^*\ell(U) = \{1\} \qquad \text{si} \qquad U \cap Y \neq \emptyset\,,$$

cette formule s'écrit encore

$$x^* F = \varinjlim_{U \subset X, U \cap Y \neq \emptyset} F(U) \, .$$

Elle signifie que le point (x^*, x_*) de $\mathcal{E}_X$ est l'image par le morphisme de topos $\mathcal{E}_Y \to \mathcal{E}_X$ du point associé dans (ii) à l'espace topologique irréductible Y.

Ainsi, pour tout espace topologique X, les points du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur X sont indexés par les sous-espaces fermés irréductibles Y de X.

De plus, étant donnés deux points x_1 et x_2 associés à deux sous-espaces fermés irréductibles Y_1 et Y_2 de X, il existe un morphisme $x_1 \to x_2$ de la catégorie $\mathrm{pt}(\mathcal{E}_X)$, nécessairement unique, si et seulement si tout ouvert U de X qui rencontre Y_1 rencontre Y_2 c'est-à-dire

$$Y_1 \subset Y_2 \, .$$

(iv) En particulier, les éléments d'un espace topologique X sont en bijection avec les points du topos associé $\mathcal{E}_X$ si et seulement si X est "sobre" au sens que tout fermé irréductible de X est l'adhérence d'un unique point de X. Dans ce cas, les morphismes $x_1 \to x_2$ de la catégorie $\mathrm{pt}(\mathcal{E}_X)$ correspondent aux relations d'appartenance d'un élément x_1 à l'adhérence d'un élément x_2.

Ainsi, tout espace topologique séparé X est sobre et sa catégorie associée $\mathrm{pt}(\mathcal{E}_X)$ n'a pas de morphismes non triviaux.

D'autre part, tout schéma muni de la topologie de Zariski est sobre. Pour le voir, il suffit de prouver que tout schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ supposé irréductible est l'adhérence d'un unique idéal premier. Comme tout idéal premier de A contient l'idéal des éléments nilpotents

$$n = \{a \in A \mid \exists \, k \geq 1 \, , \; a^k = 0\} \, ,$$

il suffit de prouver que celui-ci est premier. Considérons donc deux éléments a_1 et a_2 de A tels que

$$a_1 \cdot a_2 \in n \, .$$

Cela signifie que l'intersection $\mathrm{Spec}(A_{a_1}) \cap \mathrm{Spec}(A_{a_2}) = \mathrm{Spec}(A_{a_1 a_2})$ des ouverts de $\mathrm{Spec}(A)$ définis par a_1 et a_2 est vide. Comme $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible par hypothèse, cela impose

$$\mathrm{Spec}(A_{a_1}) = \emptyset \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Spec}(A_{a_2}) = \emptyset$$

c'est-à-dire comme voulu

$$a_1 \in n \qquad \text{ou} \qquad a_2 \in n \, .$$

(v) Pour tout foncteur entre catégories essentiellement petites

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \, ,$$

le foncteur induit par composition entre les catégories de préfaisceaux associées

$$\begin{array}{rcl} \rho^* : \widehat{\mathcal{A}'} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}} \, , \\ F & \longmapsto & F \circ \rho \end{array}$$

est la composante d'image réciproque d'un morphisme de topos

$$(\rho^*, \, \rho_*) : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}'} \, .$$

En effet, d'après le corollaire III.3.5, le foncteur ρ^* possède non seulement un adjoint à droite

$$\rho_* = \mathrm{Ran}_\rho : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}'}$$

mais aussi un adjoint à gauche

$$\rho_! = \mathrm{Lan}_\rho : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}'$$

et donc respecte les limites arbitraires.

(vi) Pour tout site $(\mathcal{A}, J)$, la paire formée du foncteur de plongement des faisceaux dans les préfaisceaux

$$j_* : \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$$

et de son adjoint à gauche le foncteur de faisceautisation

$$j^* : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$$

définit un morphisme de topos

$$(j^*, j_*) : \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}\,.$$

Comme le foncteur j_* est pleinement fidèle, c'est un plongement. Autrement dit, $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est un sous-topos de $\widehat{\mathcal{A}}$. $\square$

b) Description des morphismes de topos en termes de sites

D'après le lemme VI.1.6, tout foncteur

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$$

d'une petite catégorie $\mathcal{A}$ vers un topos $\mathcal{E}$ se prolonge en un foncteur (unique à unique isomorphisme près)

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui respecte les colimites.

Ce résultat permet de décrire les morphismes de topos en termes de sites :

Proposition VIII.2.2 (équivalence de Diaconescu). –

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie munie d'une topologie J.

Alors :

(i) *Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie $[\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{A}}_J]_g$ des morphismes de topos $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de*

$$[\mathcal{A}, \mathcal{E}]$$

constituée des foncteurs

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui sont

- *"plats" au sens que le foncteur induit*

  $$\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

  respecte les limites finies,
- *"J-continus" au sens qu'ils transforment toute famille J-couvrante de $\mathcal{A}$*

  $$(a_i \longrightarrow a)_{i \in I}$$

  en une famille globalement épimorphique

  $$(\rho(a_i) \longrightarrow \rho(a))_{i \in I}$$

  c'est-à-dire telle que $\coprod\limits_{i \in I} \rho(a_i) \to \rho(a)$ soit un épimorphisme de $\mathcal{E}$.

(ii) *En particulier, la catégorie* $\mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{A}}_J)$ *des points du topos* $\widehat{\mathcal{A}}_J$ *est équivalente à la sous-catégorie pleine de*

$$[\mathcal{A}, \mathrm{Ens}] = \widehat{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$$

constituée des foncteurs

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

qui vérifient les conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} (1) & \rho \text{ est plat au sens que le foncteur induit} \\ & \qquad \widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ & \text{respecte les limites finies,} \\ (1') & \rho \text{ s'écrit comme une colimite filtrante de foncteurs représentables,} \\ (1'') & \text{la catégorie } \int \rho \text{ des paires } (a, x) \text{ constituées d'un objet } a \text{ de } \mathcal{A} \text{ et d'un élément } x \in \rho(a) \text{ est filtrante,} \end{cases}$$

et la condition supplémentaire :

(2) ρ *est* J*-continu au sens qu'il transforme toute famille* J*-couvrante de* $\mathcal{A}$

$$(a_i \longrightarrow a)_{i \in I}$$

en une famille globalement surjective d'applications

$$(\rho(a_i) \longrightarrow \rho(a))_{i \in I} \,.$$

(iii) *Si la petite catégorie* $\mathcal{A}$ *possède des limites finies arbitraires, un foncteur de* $\mathcal{A}$ *dans un topos* $\mathcal{E}$

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est plat si et seulement si il respecte les limites finies.

Remarques :

(i) Dans le cas où J est la topologie discrète de $\mathcal{A}$, on obtient que la catégorie $[\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{A}}]_g$ des morphismes d'un topos $\mathcal{E}$ dans le topos $\widehat{\mathcal{A}}$ des préfaisceaux sur $\mathcal{A}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathcal{E}]$ constituée des foncteurs

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui sont plats.

(ii) En particulier, la catégorie $\mathrm{pt}(\widehat{\mathcal{A}})$ des points du topos $\widehat{\mathcal{A}}$ des préfaisceaux sur $\mathcal{A}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathrm{Ens}] = \widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{op}}$ constituée des foncteurs

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

qui possèdent les propriétés équivalentes (1), (1′) et (1″).

Cette sous-catégorie pleine est aussi notée $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ et appelée la catégorie des "ind-objets" de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$: ses objets sont les colimites (ou limites inductives) filtrantes d'objets de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ dans $\widehat{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$.

(iii) Soit $\mathbb{T}$ une théorie cartésienne définie par une petite catégorie avec limites finies $\mathcal{D}$.

Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie $\mathbb{T}$-mod $(\mathcal{E})$ des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ est la catégorie $[\mathcal{D},\mathcal{E}]_{\text{car}}$ des foncteurs

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui respectent les limites finies.

D'après les parties (i) et (iii) de la proposition, c'est aussi la catégorie $[\mathcal{E},\widehat{\mathcal{D}}]_g$ des morphismes de topos

$$\mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}\,.$$

De plus, pour tout morphisme de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2\,,$$

le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^*"'] & {[\mathcal{E}_2,\widehat{\mathcal{D}}]_g} \arrow[d, "\bullet\circ f"] \\ \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1) \arrow[r, "\sim"] & {[\mathcal{E}_1,\widehat{\mathcal{D}}]_g} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ces propriétés caractérisent le topos $\widehat{\mathcal{D}}$ qui est appelé le topos classifiant de la théorie cartésienne $\mathbb{T}$.

(iv) Soit $\mathbb{T}$ une théorie algébrique définie par une petite catégorie avec produits finis $\mathcal{D}$.

D'après la remarque (ii) qui suit le corollaire VI.1.9, il existe une petite catégorie avec limites finies $\mathcal{D}'$ munie d'un foncteur respectant les produits finis

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$$

qui définit une équivalence de catégories

$$[\mathcal{D}',\mathcal{C}]_{\text{car}} \longrightarrow [\mathcal{D},\mathcal{C}]_{\text{pr}} = \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{C})$$

pour toute catégorie $\mathcal{C}$ qui a des limites finies arbitraires.

A fortiori, on a pour tout topos $\mathcal{E}$ une équivalence de catégories

$$[\mathcal{E},\widehat{\mathcal{D}'}] \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})$$

et, pour tout morphisme de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2\,,$$

le carré induit

$$\begin{tikzcd} {[\mathcal{E}_2,\widehat{\mathcal{D}'}]} \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2) \arrow[d, "\bullet\circ f"] \\ {[\mathcal{E}_1,\widehat{\mathcal{D}'}]} \arrow[r] & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1) \end{tikzcd}$$

est commutatif à unique isomorphisme près.

Cette propriété caractérise à équivalence près le topos $\widehat{\mathcal{D}'}$, qui est appelé le topos classifiant de la théorie algébrique $\mathbb{T}$.

(v) Plus généralement, considérons une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J.

On peut associer à tout topos $\mathcal{E}$ la catégorie localement petite $\mathbb{T}$-mod $(\mathcal{E})$ constituée des foncteurs

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui sont

$$\begin{cases} \bullet & \text{plats (c'est-à-dire, dans le cas où } \mathcal{A} \text{ a des limites finies arbitraires, respectent les limites finies),} \\ \bullet & J\text{-continus (c'est-à-dire transforment les familles } J\text{-couvrantes en des familles globalement épimorphiques).} \end{cases}$$

Alors on a pour tout topos $\mathcal{E}$ une équivalence de catégories

$$[\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{A}}_J]_g \longrightarrow \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E})$$

et pour tout morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} {[\mathcal{E}_2, \widehat{\mathcal{A}}_J]_g} \arrow[r] \arrow[d, "\bullet\circ f"'] & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_2) \arrow[d, "f^*"] \\ {[\mathcal{E}_1, \widehat{\mathcal{A}}_J]_g} \arrow[r] & \mathbb{T}\text{-mod}\,(\mathcal{E}_1) \end{tikzcd}$$

On dit que le site $(\mathcal{A}, J)$ définit une “théorie géométrique” $\mathbb{T}$ classifiée par le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \widehat{\mathcal{A}}_J$.

Exemples :

(i) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux catégories essentiellement petites munies de deux topologies J et J' et reliées par un foncteur

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' \,.$$

Alors, pour que ρ induise un morphisme de topos (nécessairement unique à unique isomorphisme près)

$$(\rho^*, \rho_*) : \widehat{\mathcal{A}}'_{J'} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathcal{A}' \arrow[d] \\ \widehat{\mathcal{A}}_J \arrow[r, "\rho^*"'] & \widehat{\mathcal{A}}'_{J'} \end{tikzcd}$$

il suffit que

$$\begin{cases} \bullet & \text{la catégorie } \mathcal{A} \text{ possède des limites arbitraires et le foncteur } \rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}' \text{ préserve ces limites,} \\ \bullet & \text{le foncteur } \rho \text{ transforme toute famille } J\text{-couvrante de } \mathcal{A} \text{ en une famille } J'\text{-couvrante de } \mathcal{A}'. \end{cases}$$

(ii) En particulier, considérons une catégorie localement petite $\mathcal{C}$ qui a des limites finies arbitraires (comme par exemple la catégorie des schémas).

Soit $\mathcal{M}$ une classe de morphismes de $\mathcal{C}$ qui contient les isomorphismes et est stable par composition et par changement de base.

Supposons encore que, pour tout objet S de $\mathcal{C}$, la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}_S$ de $\mathcal{C}/S$ constituée des morphismes $X \to S$ qui sont dans la classe $\mathcal{M}$ est essentiellement petite.

Enfin, appelons couvrantes les familles de morphismes éléments de $\mathcal{M}$

$$(X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$$

telles que pour tout morphisme $Y \to X$ de $\mathcal{C}$ dont la source Y est non vide (c'est-à-dire n'est pas un objet initial de $\mathcal{C}$), l'un au moins des produits fibrés $X_i \times_X Y$ est non vide.

Pour tout objet S de $\mathcal{C}$, cela définit une topologie J sur la catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}_S$ et donc le topos $\mathcal{E}_S$ des faisceaux sur la catégorie $\mathcal{A}_S$ munie de la topologie J.

De plus, pour tout morphisme $S' \xrightarrow{s} S$ de $\mathcal{C}$, le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_S & \longrightarrow & \mathcal{A}_{S'} \\ (X \to S) & \longmapsto & (X \times_S S' \to S') \end{array}$$

respecte les limites finies et transforme les familles J-couvrantes de $\mathcal{A}_S$ en des familles J-couvrantes de $\mathcal{A}_{S'}$ donc induit un morphisme de topos

$$(s^*, s_*) : \mathcal{E}_{S'} \longrightarrow \mathcal{E}_S \, .$$

Enfin, pour tous morphismes $S'' \xrightarrow{s'} S' \xrightarrow{s} S$ de $\mathcal{C}$, le morphisme de topos

$$\mathcal{E}_{S''} \longrightarrow \mathcal{E}_S$$

associé à $s \circ s'$ est le composé des morphismes $\mathcal{E}_{S''} \to \mathcal{E}_{S'}$ et $\mathcal{E}_{S'} \to \mathcal{E}_S$ associés à s' et s.

Ainsi, tout choix d'une classe $\mathcal{M}$ de morphismes de $\mathcal{C}$ satisfaisant les hypothèses ci-dessus permet d'associer à tout objet de $\mathcal{C}$ un topos et à tout morphisme de $\mathcal{C}$ un morphisme de topos, de façon compatible avec la composition des morphismes.

Démonstration de la proposition :

(i) Le foncteur $\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}$ est l'unique prolongement de $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ qui respecte les colimites arbitraires. Comme il admet nécessairement un adjoint à droite, on voit qu'il définit un morphisme de topos si et seulement si il respecte les limites finies c'est-à-dire si ρ est plat.

Si ρ induit un morphisme de topos

$$(f^*, f_*) : \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \mathcal{E} \, ,$$

le foncteur composé

$$\widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}$$

du foncteur de faisceautisation j^* et de f^* respecte les colimites et prolonge ρ donc n'est autre que $\widehat{\rho}$. Cela implique que $\widehat{\rho}$ préserve les limites finies.

Ainsi, ρ induit un morphisme de topos $\widehat{\mathcal{A}}_J \to \mathcal{E}$ si et seulement si ρ est plat et le foncteur

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

se factorise en

$$\widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \mathcal{E} \, .$$

Or, l'image par le foncteur de faisceautisation j^* de toute famille J-couvrante de morphismes $a_i \to a$, $i \in I$, de $\mathcal{A}$ est une famille globalement épimorphique de morphismes de $\widehat{\mathcal{A}}_J$. Il en est a fortiori de même de son image par $\widehat{\rho}$ si une telle factorisation existe.

Réciproquement, supposons que ρ est plat et transforme toute famille J-couvrante en une famille globalement épimorphique dans $\mathcal{E}$. On en déduit que pour tout crible J-couvrant C d'un objet a de $\mathcal{A}$, le morphisme canonique de $\mathcal{E}$

$$\varinjlim_{(a' \to a) \in C} \rho(a') \longrightarrow \rho(a)$$

est un isomorphisme. En effet, la flèche

$$\coprod_{(a' \to a) \in C} \rho(a') \longrightarrow \rho(a)$$

est un épimorphisme et, pour tous éléments $a_1' \to a$ et $a_2' \to a$ de C, la famille de flèches

$$\rho(a') \longrightarrow \rho(a_1') \times_{\rho(a)} \rho(a_2')$$

indexées par les carrés commutatifs de $\mathcal{A}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r] \arrow[d] & a_1' \arrow[d] \\ a_2' \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

est globalement épimorphique puisque, ρ étant plat, on a

$$\rho(a_1') \times_{\rho(a)} \rho(a_2') = \widehat{\rho}\,(y(a_1') \times_{y(a)} y(a_2'))\,.$$

Or, pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}$, on a

$$\widehat{\rho}\,(F) = \varinjlim_{(a,x)\in\int F} \rho(a)$$

et

$$\widehat{\rho}\,(F^+) = \varinjlim_{(a,x)\in\int F^+} \rho(a)$$

où l'on rappelle que pour tout objet a de $\mathcal{A}$

$$F^+(a) = \varinjlim_{C\in J(a)} \ \varprojlim_{(a'\to a)\in C} F(a)\,.$$

On en déduit que, pour tout tel objet F de $\widehat{\mathcal{A}}$, le foncteur $\widehat{\rho}$ transforme le morphisme canonique

$$F \longrightarrow F^+$$

en un isomorphisme de $\mathcal{E}$. Par conséquent, il transforme aussi le morphisme canonique

$$F \longrightarrow F^{++} = j_* j^*(F)$$

en un isomorphisme de $\mathcal{E}$.

Il en résulte que le foncteur

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

se factorise en

$$\widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J \longrightarrow \mathcal{E}$$

comme on voulait.

(ii) est un cas particulier de (i) à condition de vérifier que les propriétés (1), (1′) et (1″) sont équivalentes.

L'implication (1″) $\Rightarrow$ (1′) résulte de ce que tout foncteur covariant $\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{Ens}$ vu comme un préfaisceau sur la catégorie opposée $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ s'écrit dans $\widehat{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{A}, \mathrm{Ens}]$ comme la colimite

$$\rho = \varinjlim_{(a,x)\in\int\rho} \mathrm{Hom}(a,\bullet)\,.$$

L'implication (1′) $\Rightarrow$ (1) résulte de ce que tout foncteur covariant représentable $\mathrm{Hom}(a,\bullet)$ respecte les limites et de ce que les colimites filtrantes respectent les limites finies dans la catégorie Ens des ensembles.

Enfin, si le foncteur $\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathrm{Ens}$ respecte les limites finies, alors pour tous objets a_1 et a_2 de $\mathcal{A}$ munis d'éléments $x_1 \in \rho(a_1)$ et $x_2 \in \rho(a_2)$, l'identité

$$\rho(a_1) \times \rho(a_2) = \widehat{\rho}\,(y(a_1) \times y(a_2)) = \varinjlim_{(a,f) \in \int y(a_1) \times y(a_2)} \rho(a)$$

montre qu'il existe un objet a de $\mathcal{A}$ muni d'une paire f de morphismes $f_1 : a \to a_1$ et $f_2 : a \to a_2$ ainsi que d'un élément $x \in \rho(a)$ tels que

$$\rho(f_1)(x) = x_1 \qquad \text{et} \qquad \rho(f_2)(x) = x_2 \,.$$

De plus, pour tous objets a_1 et a_2 de $\mathcal{A}$ munis d'un élément $x_1 \in \rho(a_1)$ et de deux morphismes $f, g : a_1 \rightrightarrows a_2$ tels que $\rho(f)(x_1) = \rho(g)(x_1)$ dans $\rho(a_2)$, l'identité

$$\ker\left(\rho(a_1) \overset{\rho(f)}{\underset{\rho(g)}{\rightrightarrows}} \rho(a_2) \right) = \widehat{\rho}\left(\ker\left(y(a_1) \overset{y(f)}{\underset{y(g)}{\rightrightarrows}} y(a_2) \right)\right) = \varinjlim_{(a,h) \in \int \ker \left(y(a_1) \overset{y(f)}{\underset{y(g)}{\rightrightarrows}} y(a_2)\right)} \rho(a)$$

montre qu'il existe un objet a de $\mathcal{A}$ muni d'un élément $x \in \rho(a)$ et d'un morphisme $h : a \to a_1$ tels que

$$f \circ h = g \circ h \qquad \text{et} \qquad x_1 = h(x) \,.$$

Cela prouve que la catégorie $\int \rho$ est filtrante.

(iii) Le foncteur de Yoneda

$$y : \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$$

respecte les limites arbitraires donc si $\widehat{\rho} : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}$ respecte les limites finies il en est a fortiori de même de $\rho = \widehat{\rho} \circ y : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ a des limites finies arbitraires et que le foncteur $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ respecte les limites finies.

Soit $\mathcal{B}$ une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ à travers laquelle ρ se factorise en un foncteur $\rho' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (qui respecte nécessairement les limites finies) et dont les objets forment une famille séparante de $\mathcal{E}$. D'après le théorème VIII.1.7 (ii), le topos $\mathcal{E}$ est équivalent au topos $\widehat{\mathcal{B}}_J$ des faisceaux sur $\mathcal{B}$ pour une certaine topologie J.

Comme le foncteur de faisceautisation $j^* : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{B}}_J$ respecte les colimites arbitraires et les limites finies, on est réduit à prouver que l'unique foncteur $\widehat{\rho}' : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ qui respecte les colimites et prolonge $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{B}}$ respecte les limites finies.

Or, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le foncteur d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ F & \longmapsto & F(b) \end{array}$$

respecte les limites et les colimites arbitraires.

On est réduit à prouver que, pour tout tel objet b de $\mathcal{B}$, l'unique foncteur

$$\widehat{F}_b : \widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

qui respecte les colimites et prolonge le foncteur composé

$$F_b : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(b,\bullet)} \mathrm{Ens}$$

respecte les limites finies.

Or, comme le foncteur $F_b : \mathcal{A} \to \text{Ens}$ respecte les limites finies, la catégorie $\int F_b$ de ses éléments est filtrante.

En effet, pour tous objets (a_1, x_1) et (a_2, x_2) de $\int F_b$, l'objet $a_1 \times a_2$ de $\mathcal{A}$ complété par l'élément $x = (x_1, x_2)$ de $F_b(a_1) \times F_b(a_2) = F_b(a_1 \times a_2)$ définit un objet de $\int F_b$ au-dessus de (a_1, x_1) et (a_2, x_2). Et pour toute paire de morphismes de $\int F_b$

$$(a_1, x_1) \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} (a_2, x_2)$$

reliant deux objets (a_1, x_1) et (a_2, x_2), l'égalisateur $a = \ker(f, g)$ de la paire de morphismes $a_1 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} a_2$ de $\mathcal{A}$ complétée par l'élément

$$x = x_1 \in F(a) = \ker \left(F(a_1) \overset{F(f)}{\underset{F(g)}{\rightrightarrows}} F(a_2) \right)$$

définit un objet (a, x) de $\int F_b$ muni d'un morphisme $h : (a, x) \to (a_1, x_1)$ tel que

$$f \circ h = g \circ h \, .$$

La conclusion résulte de l'équivalence des conditions (1) et $(1'')$ de la partie (ii) déjà démontrée de la proposition.

□

c) La correspondance entre les sous-topos et les topologies

La notion de sous-topos peut également être caractérisée en termes de sites :

Lemme VIII.2.3. –

Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ le topos des faisceaux sur une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J. Alors l'application

$$J' \longmapsto \widehat{\mathcal{A}}_{J'}$$

définit une bijection de l'ensemble des topologies J' de $\mathcal{A}$ contenant J sur l'ensemble des sous-topos de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$.

La bijection réciproque consiste à associer à tout sous-topos $\mathcal{E}' \xhookrightarrow{(j^*, j_*)} \mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ de $\mathcal{E}$ la topologie J' pour laquelle un crible C d'un objet a de $\mathcal{A}$ est couvrant si, pour tout objet F de $\mathcal{E}'$, l'application

$$(j_* F)(a) \longrightarrow \varprojlim_{(a' \to a) \in C'} (j_* F)(a')$$

est bijective.

Remarques :

(i) Cette application renverse la relation d'ordre au sens que deux topologies J' et J'' satisfont la relation

$$J' \supseteq J''$$

si et seulement si le plongement $\widehat{\mathcal{A}}_{J'} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$ se factorise à travers le plongement $\widehat{\mathcal{A}}_{J''} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$, ce que l'on note $\widehat{\mathcal{A}}_{J'} \leq \widehat{\mathcal{A}}_{J''}$.

(ii) Pour toute famille de sous-topos $\mathcal{E}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ définis par des topologies $J_i \supseteq J$, l'intersection $\left(\bigcap_{i \in I} J_i\right)$ est une topologie qui contient J. Elle définit un sous-topos de $\mathcal{E}$ noté

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{E}_i$$

et caractérisé par la propriété que, pour tout sous-topos $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}' \geq \bigvee_{i \in I} \mathcal{E}_i \Longleftrightarrow \mathcal{E}' \geq \mathcal{E}_i \,, \qquad \forall \, i \in I \,.$$

(iii) Pour toute telle famille de sous-topos $\mathcal{E}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ définis par des topologies $J_i \supseteq J$, la sous-catégorie pleine $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$ constituée des objets F qui sont des faisceaux pour toutes les topologies J_i est un sous-topos de $\mathcal{E}$ noté

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{E}_i$$

et caractérisé par la propriété que, pour tout sous-topos $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E}' \leq \bigwedge_{i \in I} \mathcal{E}_i \Longleftrightarrow \mathcal{E}' \leq \mathcal{E}_i \,, \qquad \forall \, i \in I \,.$$

Considérons en effet la topologie J_0 de $\mathcal{A}$ pour laquelle un crible C d'un objet a est couvrant si, pour toute flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{A}$ et tout objet F de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$, l'application

$$F(b) \longrightarrow \varprojlim_{(b' \to b) \in f^* C} F(b')$$

est bijective. Les axiomes de maximalité et de stabilité sont en effet trivialement vérifés par J_0. Pour la transitivité, il suffit de remarquer que si C et C' sont deux cribles d'un objet a de $\mathcal{A}$, $f : b \to a$ est une flèche de $\mathcal{A}$ et F est un objet de $\mathcal{E}$ tel que

$$F(b) \cong \varprojlim_{(b' \to b) \in f^* C'} F(b') \qquad \text{et} \qquad F(b') \cong \varprojlim_{(b'' \to b') \in g^* f^* C} \,, \qquad \forall \left(b' \xrightarrow{\ g\ } b\right) \in f^* C' \,,$$

alors on a

$$F(b) \cong \varprojlim_{(b'' \to b) \in f^* C} F(b'') \,.$$

La topologie J_0 contient chaque topologie J_i, $i \in I$, donc on a

$$\widehat{\mathcal{A}}_{J_0} \leq \widehat{\mathcal{A}}_{J_i} \,, \qquad \forall \, i \in I \,,$$

et $\widehat{\mathcal{A}}_{J_0}$ est une sous-catégorie pleine de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$.

D'autre part, tout objet F de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est un faisceau pour la topologie J_0, autrement dit est un objet de $\widehat{\mathcal{A}}_{J_0}$.

Ainsi, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i = \widehat{\mathcal{A}}_{J_0}$ est un sous-topos de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$. Il contient tout sous-topos contenu dans les $\mathcal{E}_i$, $i \in I$.

(iv) Pour tous sous-topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}$, il existe un sous-topos

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_2 \backslash \mathcal{E}_1$$

caractérisé par la propriété que pour tout sous-topos $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ on a l'équivalence

$$\mathcal{E}' \geq \mathcal{E}_0 \Longleftrightarrow \mathcal{E}' \vee \mathcal{E}_1 \geq \mathcal{E}_2 \,.$$

Autrement dit, pour toutes topologies J_1 et J_2 de $\mathcal{A}$ contenant J, il existe une topologie contenant J

$$J_0 = (J_1 \Rightarrow J_2)$$

caractérisée par la propriété que pour toute topologie J' de $\mathcal{A}$ on a l'équivalence

$$J' \subseteq J_0 \Longleftrightarrow J' \cap J_1 \subseteq J_2 \,.$$

De plus, un crible C d'un objet a de $\mathcal{A}$ est dans $J_0(a)$ si et seulement si, pour toute flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{A}$ et tout crible C' de b tel que

- C' est J_1-couvrant,
- C' est J_2-fermé au sens que pour toute flèche $g : b' \to b$ telle que $g^*(C') \in J_2(b')$ on a nécessairement $g \in C'$,
- C' contient $f^*(C)$,

alors le crible C' est le crible maximal de b engendré par id_b.

Pour le voir, il faut vérifier que J_0 est bien une topologie, que $J_0 \cap J_1 \subseteq J_2$ et que, pour toute topologie J', $J' \cap J_1 \subseteq J_2$ implique $J' \subseteq J_0$.

L'axiome de maximalité est vérifié par J_0 puisque l'image réciproque par une flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{A}$ du crible maximal de a est le crible maximal de b.

L'axiome de stabilité est évident sur la définition.

Pour l'axiome de transitivité, considérons deux cribles C, C' d'un objet a de $\mathcal{A}$ tels que $C' \in J_0(a)$ et $g^*C \in J_0(b)$, $\forall\, (g : a' \to a) \in C'$. On doit montrer que pour toute flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{A}$, tout crible C'' de b contenant f^*C qui est J_1-couvrant et J_2-fermé est le crible maximal de b. Or, f^*C et f^*C' sont deux cribles de b tels que $f^*C' \in J_0(b)$ et $g^*f^*C \in J_0(b')$, $\forall\, (g : b' \to b) \in f^*C'$. On peut donc supposer que $b = a$ et $f = \mathrm{id}_a$. Pour toute flèche $(g : a' \to a) \in C'$, g^*C'' est J_1-couvrant et J_2-fermé (puisque C'' est J_1-couvrant et J_2-fermé) et il contient g^*C qui est élément de $J_0(a')$. Cela implique que g^*C'' est le crible maximal de a', autrement dit que $g \in C''$ et $C'' \supset C'$. Comme $C' \in J_0(a)$ et C'' est J_1-couvrant et J_2-fermé, il en résulte comme voulu que C'' est le crible maximal.

Pour montrer l'inclusion $J_0 \cap J_1 \subseteq J_2$, considérons un objet a de $\mathcal{A}$ et un crible $C \in J_0(a) \cap J_1(a)$. Soit C' le crible constitué des flèches $g : a' \to a$ telles que $g^*C \in J_2(a')$. On remarque d'abord que $C' \supset C$ car, pour toute flèche $g : a' \to a$ de C, g^*C est le crible maximal. Comme C est J_1-couvrant, C' l'est également. Enfin, C' est J_2-fermé car, pour toute flèche $f : b \to a$ telle que f^*C' est J_2-couvrant, on a par définition $g^*f^*C \in J_2(b')$, $\forall\, (g : b' \to b) \in f^*C'$, d'où $f^*C \in J_2(b)$ c'est-à-dire $f \in C'$. On en conclut que C' est le crible maximal de a et donc $C \in J_2(a)$.

Enfin, considérons une topologie J' de $\mathcal{A}$ telle que $J' \cap J_1 \subseteq J_2$. On doit montrer que tout crible J'-couvrant C d'un objet a est dans $J_0(a)$. Pour cela, considérons une flèche $f : b \to a$ et un crible C' de b contenant f^*C qui est J_1-couvrant et J_2-fermé. Le crible C' est aussi J'-couvrant (puisqu'il contient f^*C) donc il est J_2-couvrant. Etant J_2-fermé, il est maximal, ce qui montre comme voulu que $C \in J_0(a)$.

(v) Il résulte de la remarque (iv) que, dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathcal{E}$, $\vee$ est distributif par rapport aux intersections infinies $\bigwedge\limits_{i\in I}$ au sens que, pour tous sous-topos $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_i$, $i \in I$, on a

$$\mathcal{E}_0 \vee \left(\bigwedge_{i\in I} \mathcal{E}_i \right) = \bigwedge_{i\in I} (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_i) \,.$$

En effet, pour tout sous-topos $\mathcal{E}'$, on a la suite d'équivalences

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{E}_0 \vee \left(\bigwedge\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i \right) \geq \mathcal{E}' \\ \Leftrightarrow & \bigwedge\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i \geq \mathcal{E}' \backslash \mathcal{E}_0 \\ \Leftrightarrow & \forall\, i \in I \,,\ \mathcal{E}_i \geq \mathcal{E}' \backslash \mathcal{E}_0 \\ \Leftrightarrow & \forall\, i \in I \,,\ \mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_i \geq \mathcal{E}' \\ \Leftrightarrow & \bigwedge\limits_{i\in I} (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_i) \geq \mathcal{E}' \,. \end{array}$$

En termes plus abstraits, dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathcal{E}$, le foncteur

$$\mathcal{E}' \longmapsto \mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}'$$

admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\mathcal{E}'' \longmapsto \mathcal{E}'' \backslash \mathcal{E}_0$$

donc il préserve les produits arbitraires, qui ne sont autres que les $\bigwedge\limits_{i\in I}$.

(vi) Il résulte de la remarque (v) que $\wedge$ est distributif par rapport aux sup finis $\vee$ au sens que, pour tous sous-topos $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\mathcal{E}_0 \wedge (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = (\mathcal{E}_0 \wedge \mathcal{E}_1) \vee (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_2) \,.$$

En effet, on a d'après (v)

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{E}_0 \wedge \mathcal{E}_1) \vee (\mathcal{E}_0 \wedge \mathcal{E}_2) & = & (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_0) \wedge (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_2) \wedge (\mathcal{E}_0 \vee \mathcal{E}_1) \wedge (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \\ & = & \mathcal{E}_0 \wedge (\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) \,. \end{array}$$

(vii) Pour tout morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ et pour tout sous-topos $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, il existe un unique sous-topos $f^*\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1' \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}'$ tel qu'un morphisme de topos $\mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ se factorise à travers $\mathcal{E}_1'$ si et seulement si le morphisme composé $\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ se factorise à travers $\mathcal{E}_1$.

En effet, on peut supposer que $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$ et $\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{A}}'_{J'}$, où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux petites sous-catégories pleines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ telles que le foncteur $f^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ envoie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$.

Alors le sous-topos $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$ est défini par une topologie $J_1 \supseteq J$ de $\mathcal{A}$ et les sous-topos $\mathcal{E}_1'$ de $\mathcal{E}'$ sont définis par les topologies $J_1' \supseteq J'$ de $\mathcal{A}'$. Un morphisme $g = (g^*, g_*) : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ [resp. le composé $f \circ g : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}$] se factorise à travers un sous-topos $\mathcal{E}_1'$ de $\mathcal{E}'$ [resp. le sous-topos $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$] si et seulement si $g^* : \mathcal{A}' \to \mathcal{E}''$ [resp. $g^* \circ f^* : \mathcal{A} \to \mathcal{E}''$] transforme les familles couvrantes au sens de J_1' [resp. de J_1] en des familles globalement épimorphiques de $\mathcal{E}''$.

On voit donc que le sous-topos de $\mathcal{E}'$ défini par la topologie J_1' engendrée par J' et par les images par f^* des familles couvrantes au sens de J_1 (autrement dit, la plus petite topologie qui contient parmi ses familles couvrantes celles de J' et les images par f^* de celles de J_1) répond à la question posée.

Ainsi, tout morphisme de topos $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ définit une application f^* de l'ensemble des sous-topos de $\mathcal{E}$ vers celui de $\mathcal{E}'$, de telle façon que pour tous morphismes $\mathcal{E}'' \xrightarrow{g} \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, on a

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \,.$$

(viii) En particulier, pour tout topos $\mathcal{E}$, on dispose d'un foncteur contravariant

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}\}\,. \end{array}$$

Pour le comprendre concrètement, on peut représenter $\mathcal{E}$ comme le topos des faisceaux sur une petite sous-catégorie pleine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ munie de la topologie J pour laquelle les familles couvrantes sont les familles globalement épimorphiques dans $\mathcal{E}$. On peut même supposer que $\mathcal{A}$ est stable par produits fibrés et, si l'on s'intéresse à un morphisme $S' \xrightarrow{f} S$ de $\mathcal{E}$, que S' et S sont dans $\mathcal{A}$.

Alors les topos relatifs $\mathcal{E}/S$ et $\mathcal{E}/S'$ sont définis par les catégories relatives $\mathcal{A}/S$ et $\mathcal{A}/S'$ munies de la topologie J et leurs sous-topos $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}/S$ ou $\mathcal{E}_1' \hookrightarrow \mathcal{E}/S'$ correspondent aux topologies J_1 de $\mathcal{A}/S$ ou J_1' de $\mathcal{A}'/S$ qui contiennent J.

Avec cette description, $\mathcal{E}_1'$ est le transformé $f^*\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}_1$ par le morphisme $(f^*, f_*) : \mathcal{E}/S' \to \mathcal{E}/S$ si et seulement si J_1' est la plus petite topologie de $\mathcal{A}/S'$ contenant J pour laquelle sont couvrantes les familles de morphismes

$$(a_i \times_S S' \longrightarrow a \times_S S')_{i\in I}$$

induites par les familles J-couvrantes de $\mathcal{A}/S$

$$(a_i \longrightarrow a)_{i\in I}\,.$$

Cette description permet de montrer que le foncteur contravariant

$$S \longmapsto \{\text{sous-topos de } \mathcal{E}/S\}$$

transforme les colimites en limites, donc est représentable.

Exemple :

Soit X un espace topologique.

Pour tout sous-espace Y de X, c'est-à-dire tout sous-ensemble de X muni de la topologie induite par celle de X, le topos $\mathcal{E}_Y$ des faisceaux sur Y est un sous-topos du topos $\mathcal{E}_X$ des faisceaux sur X. Si $\mathcal{A}_X$ est la catégorie des ouverts de X, la topologie J_Y de $\mathcal{A}_X$ qui correspond au sous-topos $\mathcal{E}_Y$ de $\mathcal{E}_X$ est celle pour laquelle une famille d'inclusions entre ouverts de X

$$(U_i \subset U)_{i\in I}$$

est couvrante si et seulement si $\bigcup\limits_{i\in I} (U_i \cap Y) = U \cap Y$.

Ainsi, un objet F de $\mathcal{E}_X$ est un faisceau pour la topologie J_Y définie par un sous-espace Y de X si et seulement si, pour tous ouverts $V \subset U$ de X tels que $V \cap Y = U \cap Y$, l'application

$$F(U) \to F(V)$$

est bijective.

Si Y est localement fermé, c'est-à-dire est l'intersection d'un ouvert U_Y et d'un fermé $\overline{Y}$, cela revient à demander que pour tout ouvert U l'application

$$F(U) \longrightarrow F(U \cap U_Y)$$

est bijective et l'ensemble

$$F(U - \overline{Y} \cap U)$$

est vide.

On en déduit que pour toute famille finie de sous-espaces localement fermés $Y_1, \ldots, Y_n$ de X, le sous-topos $\mathcal{E}_{Y_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{E}_{Y_n}$ de $\mathcal{E}_X$ est le topos $\mathcal{E}_Y$ associé au sous-espace localement fermé $Y = Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$ de X.

D'autre part, pour toute famille de sous-espaces Y_i, $i \in I$, de X, le sous-topos $\bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{E}_{Y_i}$ de $\mathcal{E}_X$ est le topos $\mathcal{E}_Y$ associé au sous-espace $Y = \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$ de X. En effet, pour toute famille d'ouverts $U_j \subset U$ d'un ouvert U de X, la condition

$$Y \cap U = \bigcup_j \, (Y \cap U_j)$$

équivaut aux conditions

$$Y_i \cap U = \bigcup_j \, (Y_i \cap U_j) \, , \qquad \forall \, i \in I \, .$$

On en déduit que pour tous sous-espaces Y_1 et Y_2 de X et le sous-espace induit $Y_2 \backslash Y_1 = Y_2 - (Y_1 \cap Y_2)$, le sous-topos $\mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1}$ vérifie la formule

$$\mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1} \vee \mathcal{E}_{Y_1} = \mathcal{E}_{Y_1 \cup Y_2} \supseteq \mathcal{E}_{Y_2}$$

et donc il contient le sous-topos $\mathcal{E}_{Y_2} \backslash \mathcal{E}_{Y_1}$.

Il lui est égal si les espaces Y_1 et $Y_2 \backslash Y_1$ sont localement fermés. En effet, pour tout sous-topos $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_X$, la relation

$$\mathcal{E}' \vee \mathcal{E}_{Y_1} \supseteq \mathcal{E}_{Y_2}$$

implique dans ce cas

$$\mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}' \wedge \mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1} = (\mathcal{E}' \vee \mathcal{E}_{Y_1}) \wedge \mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1} \supseteq \mathcal{E}_{Y_2} \wedge \mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1} = \mathcal{E}_{Y_2 \backslash Y_1} \, .$$

En particulier, si U est un ouvert de X et $Y = X - U$ le fermé complémentaire, on a

$$\mathcal{E}_U = \mathcal{E}_X \backslash \mathcal{E}_Y \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_Y = \mathcal{E}_X \backslash \mathcal{E}_U \, .$$

Terminons par la remarque que les sous-topos du topos $\mathcal{E}_X$ associé à un espace topologique X ne sont pas nécessairement tous associés à des sous-espaces de X. Autrement dit, il existe en général des topologies de la catégorie $\mathcal{A}_X$ des ouverts de X plus fines que la topologie canonique et qui ne sont définies par aucun sous-espace de X. Par exemple, la topologie définie en demandant qu'une famille d'ouverts $(U_i \subset U)$ est couvrante si et seulement si la réunion des U_i est dense dans U n'est en général pas définie par un sous-espace. En fait, si tout fermé irréductible de X est contenu dans l'adhérence de son ouvert complémentaire, le sous-topos de $\mathcal{E}_X$ défini par cette topologie n'a aucun point.

Démonstration du lemme :

Pour tout sous-topos $\mathcal{E}' \xhookrightarrow{j=(j^*,j_*)} \mathcal{E}$ d'un topos $\mathcal{E}$, un morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ est un plongement si et seulement si le composé $j \circ f : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ est un plongement.

Par conséquent, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}$ est le topos des préfaisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}$ est muni du foncteur de Yoneda $y : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ qui identifie $\mathcal{A}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}$.

Soit $\mathcal{E}' \xhookrightarrow{(j^*,j_*)} \mathcal{E}$ un sous-topos de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}$. Par hypothèse, le foncteur j_* est pleinement fidèle ou, ce qui revient au même, le morphisme d'adjonction $j^* \circ j_* \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}'}$ est un isomorphisme.

On observe que, pour tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}$, la famille des morphismes

$$y(a) \xrightarrow{\ x\ } F \, , \qquad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \, , \qquad x \in \mathrm{Hom}(y(a), F) = F(a) \, ,$$

est globalement épimorphique, donc aussi la famille induite des morphismes

$$j^* x : j^* y(a) \longrightarrow j^* F$$

de $\mathcal{E}'$.

Il en résulte que, pour tout crible C d'un objet a de $\mathcal{A}$ engendré par une famille de morphismes $x_i : a_i \to a$, $i \in I$, on a

$$j^* y(a) = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} j^* y(a')$$

si et seulement si la famille des

$$j^* x_i : j^* y(a_i) \longrightarrow j^* y(a)$$

est globalement épimorphique.

La nécessité de la condition est évidente. Réciproquement, si elle est vérifiée, et comme $\mathcal{E}'$ est un topos, $j^* y(a)$ s'identifie à la colimite du diagramme constitué des $j^* y(a_i)$ et des $j^* y(a_i) \times_{j^* y(a)} j^* y(a_j) = j^*(y(a_i) \times_{y(a)} y(a_j))$ reliés par les flèches :

$$\begin{tikzcd}
 & j^* y(a_i) \\
j^*(y(a_i) \times_{y(a)} y(a_j)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & j^* y(a_j)
\end{tikzcd}$$

Or, pour tous indices i, j, la familles des flèches

$$y(a') \longrightarrow y(a_i) \times_{y(a)} y(a_j) \,, \qquad a' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \,,$$

c'est-à-dire des carrés commutatifs de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r] \arrow[d] & a_j \arrow[d] \\
a_i \arrow[r] & a
\end{tikzcd}$$

est globalement épimorphique, ce qui montre comme voulu

$$j^* y(a) = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} j^* y(a') \,.$$

Disons qu'un tel crible C d'un objet a est J-couvrant si ces deux conditions équivalentes sont vérifiées.

Cela définit une topologie J de $\mathcal{A}$.

En effet, J contient le crible maximal de tout objet a.

Elle vérifie l'axiome de stabilité car pour tous morphismes de $\mathcal{A}$

$$b \longrightarrow a \qquad \text{et} \qquad a_i \longrightarrow a \,, \qquad i \in I \,,$$

tels que la famille des $j^* y(a_i) \to j^* y(a)$ soit globalement épimorphique, il en est de même de la famille des

$$j^*(y(b) \times_{y(a)} y(a_i)) = j^* y(b) \times_{j^* y(a)} j^* y(a_i) \longrightarrow j^* y(b)$$

donc aussi de la familles des flèches composées

$$j^* y(a') \longrightarrow j^*(y(b) \times_{y(a)} y(a_i)) \longrightarrow j^* y(b)$$

avec les transformées par j^* des flèches

$$y(a') \longrightarrow y(b) \times_{y(a)} y(a_i)\,, \qquad a' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,, \qquad i \in I\,.$$

Enfin, J vérifie l'axiome de transitivité car si C et C' sont deux cribles d'un objet a de $\mathcal{A}$ tels que

$$j^* y(a) = \varinjlim_{(a' \to a) \in C'} j^* y(a')$$

et

$$j^* y(a') = \varinjlim_{(a'' \to a') \in x^* C} j^* y(a'')\,, \qquad \forall \left(a' \xrightarrow{x} a\right) \in C'\,,$$

alors toute flèche vers un objet F de $\mathcal{E}'$

$$\varinjlim_{(a'' \to a) \in C} j^* y(a'') \longrightarrow F$$

provient d'une unique flèche

$$j^* y(a) \longrightarrow F\,.$$

Le foncteur

$$j^* : \widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

respecte les limites finies et les colimites arbitraires, et il transforme les familles J-couvrantes en des familles globalement épimorphiques. Donc le plongement $(j^*, j_*) : \mathcal{E}' \hookrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ se factorise en un plongement

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E}' \hookrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J$$

à travers le sous-topos $\widehat{\mathcal{A}}_J \xhookrightarrow{(i^*, i_*)} \widehat{\mathcal{A}}$.

Montrons que les foncteurs f^* et f_* définissent une équivalence des catégories $\mathcal{E}'$ et $\widehat{\mathcal{A}}_J$.

On sait déjà que $f^* \circ f_* \to \mathrm{id}_{\mathcal{E}'}$ est un isomorphisme. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{A}}_J} \to f_* \circ f^*$ est aussi un isomorphisme, autrement dit que, pour tout faisceau F dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, l'application

$$F(a) \longrightarrow f_* f^*(F)(a)$$

est bijective.

Pour l'injectivité, considérons deux éléments $x_1, x_2 \in F(a)$ induisant le même élément de $f_* f^*(F)(a)$, c'est-à-dire deux flèches

$$y(a) \rightrightarrows i_* F$$

qui ont la même transformée par le foncteur $j^* : \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}'$. Alors l'égalisateur

$$F' = \ker\left(y(a) \rightrightarrows i_* F \right)$$

est un sous-objet de $y(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$ c'est-à-dire un crible C de a. Son transformé par j^* est $j^* y(a)$ ce qui signifie qu'il est J-couvrant. Comme F est un faisceau pour la topologie J, cela impose $x_1 = x_2$.

Ainsi, la flèche $F \to f_* f^*(F)$ est un monomorphisme de $\widehat{\mathcal{A}}_J$.

Considérons un objet a de $\mathcal{A}$ et un élément $x \in f_* f^*(F)(a)$ c'est-à-dire une flèche

$$y(a) \longrightarrow i_* f_* f^*(F) = j_* f^*(F)\,.$$

Le produit fibré

$$y(a) \times_{i_* f_* f^*(F)} i_*(F)$$

est un sous-objet de $y(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$ c'est-à-dire un crible C de a. Son transformé par j^* est

$$j^* y(a) \times_{j^* j_* f^*(F)} j^* i_*(F) = j^* y(a) \times_{f^*(F)} f^* i^* i_*(F) = j^* y(a)$$

ce qui signifie qu'il est J-couvrant. Comme F est un faisceau pour la topologie J, cela impose que l'élément

$$x \in f_* f^* F(a)$$

provient d'un (unique) élément de $F(a)$.

Pour terminer la démonstration du lemme, il reste à montrer que si J est une topologie de $\mathcal{A}$ et

$$\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{A}}_J \xhookrightarrow{(j^*, j_*)} \widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{E}$$

est le sous-topos associé de $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{E}$, alors une famille de flèches de $\mathcal{A}$

$$x_i : a_i \longrightarrow a$$

est J-couvrante si et seulement si la famille induite

$$j^* y(x_i) : j^* y(a_i) \longrightarrow j^* y(a)$$

est globalement épimorphique dans $\widehat{\mathcal{A}}_J = \mathcal{E}'$.

La nécessité de cette condition est déjà connue.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il existe un crible J-couvrant C de a tel que toute flèche $a' \to a$ de C se factorise à travers l'une au moins des flèches $x_i : a_i \to a$.

Par transitivité, cela impose que le crible engendré par les flèches $a_i \xrightarrow{x_i} a$ est J-couvrant.

□

d) Localisation des topos

La notion de topos a de remarquables propriétés de stabilité par les opérations naturelles sur les catégories.

La première est la stabilité par localisation :

Lemme VIII.2.4. –

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

(i) *Pour tout objet S de $\mathcal{E}$, la catégorie relative $\mathcal{E}/S$ est encore un topos.*

Plus précisément, si $\mathcal{E}$ est la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J, alors $\mathcal{E}/S$ est la catégorie des faisceaux sur le site $(\int S, J_S)$ constitué de la catégorie $\int S$ des éléments du faisceau S munie de la topologie induite J_S pour laquelle une famille de morphismes de $\int S$

$$(a_i, x_i) \longrightarrow (a, x)\,, \qquad i \in I\,,$$

est couvrante quand la famille associée de morphismes de $\mathcal{A}$

$$a_i \longrightarrow a\,, \qquad i \in I\,,$$

est J-couvrante.

(ii) *Pour tout morphisme $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ de $\mathcal{E}$, le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathcal{E}/S_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}/S_1\,, \\ (X \to S_2) & \longmapsto & (X \times_{S_2} S_1 \to S_1) \end{array}$$

respecte les limites et les colimites arbitraires.

Il admet un adjoint à gauche qui n'est autre que le foncteur de composition avec f

$$\begin{array}{rcl} f_! : \mathcal{E}/S_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}/S_2\,, \\ (X \to S_1) & \longmapsto & (X \to S_1 \to S_2) \end{array}$$

et un adjoint à droite

$$f_* : \mathcal{E}/S_1 \longrightarrow \mathcal{E}/S_2$$

avec lequel il forme un morphisme de topos

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E}/S_1 \longrightarrow \mathcal{E}/S_2\,.$$

(iii) *Dans les conditions de* (ii)*, le foncteur*

$$f_* : \mathcal{E}/S_1 \longrightarrow \mathcal{E}/S_2$$

est pleinement fidèle si et seulement si le morphisme

$$f : S_1 \longrightarrow S_2$$

est un monomorphisme de $\mathcal{E}$.

S'il en est ainsi, le morphisme

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E}/S_1 \longrightarrow \mathcal{E}/S_2$$

est un plongement qui fait de $\mathcal{E}/S_1$ un sous-topos de $\mathcal{E}/S_2$ appelé un "sous-topos ouvert".

(iv) *Pour tout objet S de $\mathcal{E}$, se donner un point du topos $\mathcal{E}/S$ équivaut à se donner*

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{un point } (x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \to \mathcal{E} \text{ de } \mathcal{E}, \\ \bullet \quad \text{un élément } s \text{ de l'ensemble } x^*(S). \end{cases}$$

Le foncteur fibre associé est alors le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ (X \xrightarrow{f} S) & \longmapsto & x^*(f)^{-1}(s) = \{x \in x^*(X) \mid x^*(f)(x) = s\}\,. \end{array}$$

Remarques :

(i) En particulier, pour tout préfaisceau S sur une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{A}$, la catégorie relative $\widehat{\mathcal{A}}/S$ est la catégorie $\widehat{\int S}$ des préfaisceaux sur la catégorie $\int S$ des éléments de S.

(ii) Pour tous morphismes $S_1 \xrightarrow{f} S_2 \xrightarrow{g} S_3$ de $\mathcal{E}$, le morphisme composé

$$\mathcal{E}/S_1 \xrightarrow{(f^*,f_*)} \mathcal{E}/S_2 \xrightarrow{(g^*,g_*)} \mathcal{E}/S_3$$

n'est autre que le morphisme

$$\mathcal{E}/S_1 \xrightarrow{((g\circ f)^*,(g\circ f)_*)} \mathcal{E}/S_3$$

associé au morphisme composé $g \circ f : S_1 \to S_3$.

De même, le foncteur composé

$$\mathcal{E}/S_1 \xrightarrow{f_!} \mathcal{E}/S_2 \xrightarrow{g_!} \mathcal{E}/S_3$$

est égal à $(g \circ f)_!$.

(iii) Se donner un sous-topos ouvert $\mathcal{E}/S$ d'un topos $\mathcal{E}$ équivaut à se donner un sous-objet $S \hookrightarrow 1$ de l'objet final 1 de $\mathcal{E}$.

De plus, deux sous-topos ouverts $\mathcal{E}/S_1$ et $\mathcal{E}/S_2$ de $\mathcal{E}$ sont reliés par un morphisme compatible (nécessairement unique)

$$\mathcal{E}/S_1 \longrightarrow \mathcal{E}/S_2$$

si et seulement si S_1 est contenu dans S_2 au sens que $S_1 \hookrightarrow 1$ se factorise (de manière nécessairement unique) à travers $S_2 \hookrightarrow 1$.

(iv) On appelle sous-topos fermés d'un topos $\mathcal{E}$ les complémentaires $\mathcal{E}\backslash(\mathcal{E}/S)$ de ses sous-topos ouverts $\mathcal{E}/S$.

Exemple :

Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}_X$ la catégorie de ses ouverts munie de sa topologie naturelle et $\mathcal{E}_X$ le topos associé des faisceaux sur X muni du foncteur

$$\ell : \mathcal{A}_X \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}}_X \xrightarrow{j^*} \mathcal{E}_X\,.$$

L'objet X de $\mathcal{A}_X$ est un objet final et toute flèche de $\mathcal{A}_X$ est un monomorphisme. Donc l'objet final de $\mathcal{E}_X$ est $\ell(X) = 1$ et toute flèche de $\mathcal{A}_X$ c'est-à-dire toute inclusion entre ouverts $U \subset V$ induit un plongement ouvert de topos

$$\mathcal{E}_X/\ell(U) \longrightarrow \mathcal{E}_X/\ell(V)\,.$$

Pour tout ouvert $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ de l'espace X, le sous-topos ouvert $\mathcal{E}_X/\ell(U)$ s'identifie au topos $\mathcal{E}_U$ des faisceaux sur U et le foncteur

$$i^* : \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{E}_X/\ell(U) = \mathcal{E}_U$$

n'est autre que le foncteur de restriction à U des faisceaux sur X.

Réciproquement, tout sous-topos ouvert de $\mathcal{E}_X$ est de cette forme ; autrement dit, tout sous-objet de l'objet final $1 = \ell(X)$ de $\mathcal{E}_X$ provient d'un unique ouvert U de X.

En effet, tout sous-faisceau S de $\ell(X) = \mathrm{Hom}(\bullet, X)$ associe à tout ouvert U de X ou bien l'ensemble à un élément $\ell(X)(U)$ ou bien l'ensemble vide. Pour tous ouverts $U \subset V$ on a $S(U) \neq \emptyset$ si $S(V) \neq \emptyset$ et pour toute réunion d'ouverts $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, on a $S(U) \neq \emptyset$ si $S(U_i) \neq \emptyset$, $\forall\, i \in I$. On en déduit qu'il existe un ouvert U_S de X tel que, pour tout ouvert U, l'assertion $S(U) \neq \emptyset$ équivaut à $U \subset U_S$. Cela impose $S = \ell(U_S)$.

Les sous-topos fermés $\mathcal{E}_X\backslash\mathcal{E}_U$ de $\mathcal{E}_X$ sont les topos $\mathcal{E}_Y$ associés aux sous-espaces fermés $Y = X\backslash U$ de X.

Cet exemple justifie la définition générale de la notion de sous-topos ouvert dans la partie (iii) du lemme et celle de sous-topos fermé dans la remarque (iv).

Démonstration du lemme :

(i) On rappelle que la catégorie $\int S$ des éléments de S a pour objets les paires (a, x) constituées d'un objet a de $\mathcal{A}$ et d'un élément $x \in S(a)$ et pour morphismes $(a_1, x_1) \to (a_2, x_2)$ les morphismes $f : a_1 \to a_2$ de $\mathcal{A}$ tels que $S(f)(a_2) = a_1$.

Pour tout objet (a, x) de $\int S$, tout crible J-couvrant C de a constitué de morphismes $f : a' \to a$ définit un crible couvrant de (a, x) constitué des morphismes $f : (a', S(f)(x)) \to (a, x)$. Et, réciproquement, tout crible couvrant de (a, x) est de cette forme.

On en déduit comme voulu que se donner un faisceau sur $\int S$ équivaut à se donner un faisceau F sur $\mathcal{A}$ muni d'un morphisme $F \to S$.

(ii) Pour tous objets $X_1 \to S_1$ et $X_2 \to S_2$ de $\mathcal{E}/S_1$ et $\mathcal{E}/S_2$, on a

$$\mathrm{Hom}_{S_2}(X_1, X_2) = \mathrm{Hom}_{S_1}(X_1, X_2 \times_{S_2} S_1)$$

d'où il résulte que le foncteur $f_!$ de composition avec $f : S_1 \to S_2$ est adjoint à gauche de $f^* : (X_2 \to S_2) \mapsto (X_2 \times_{S_2} S_1 \to S_1)$.

Comme $\mathcal{E}$ est un topos, le foncteur f^* respecte aussi les colimites arbitraires et donc il admet un adjoint à droite f_*.

(iii) D'après la remarque (iii) qui suit le lemme III.1.2, l'adjoint à droite f_* de f^* est pleinement fidèle si et seulement si l'adjoint à gauche $f_!$ de f^* est pleinement fidèle.

Or, le foncteur $f_!$ de composition avec $f : S_1 \to S_2$ est pleinement fidèle si et seulement si $f : S_1 \to S_2$ est un monomorphisme.

(iv) Tout objet S de $\mathcal{E}$ est muni d'un unique morphisme

$$p : S \longrightarrow 1$$

vers l'objet final 1 de $\mathcal{E}$, et ce morphisme p définit un morphisme de topos

$$(p^*, p_*) : \mathcal{E}/S \to \mathcal{E}\,.$$

Par conséquent, tout point de $\mathcal{E}/S$

$$(y^*, y_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}/S$$

définit par composition avec (p^*, p_*) un point de $\mathcal{E}$

$$(x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Pour tout objet $X \to S$ de $\mathcal{E}/S$, on a

$$\begin{array}{rcl} p_!(X \to S) & = & X\,, \\ p^* p_!(X \to S) & = & (X \times S \to S) \end{array}$$

et le morphisme d'adjonction

$$(X \to S) \longrightarrow p^* p_!(X \to S)$$

s'identifie au triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Par conséquent, on a pour tout tel objet $X \to S$

$$(X \to S) = p^* p_!(X \to S) \times_{p^* p_!(\mathrm{id}_S)} \mathrm{id}_S\,.$$

Comme $\mathrm{id}_S : S \to S$ est l'objet final de $\mathcal{E}/S$, son image par y^* est un objet final de Ens donc un sous-ensemble à un élément s de

$$y^* p^* p_!(\mathrm{id}_S) = x^*(S)$$

et on a pour tout objet $X \to S$ de $\mathcal{E}/S$

$$\begin{array}{rcl} y^*(X \to S) & = & y^* p^* p_!(X \to S) \times_{y^* p^* p_!(\mathrm{id}_S)} y^*(\mathrm{id}_S) \\ & = & x^*(X) \times_{x^*(S)} s\,. \end{array}$$

Réciproquement, pour tout point de $\mathcal{E}$

$$(x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$$

et tout élément s de $x^*(S)$, le foncteur

$$\begin{array}{rcl} y^* : \mathcal{E}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ (X \to S) & \longmapsto & x^*(X) \times_{x^*(S)} s \end{array}$$

respecte les colimites arbitraires et les limites finies donc est le foncteur fibre d'un point du topos $\mathcal{E}/S$.

□

e) Les topos classifiants des groupes (ou de monoïdes) internes

Après la localisation, un second procédé très important de formation de nouveaux topos à partir de topos de base est celui qui consiste à associer à tout groupe interne d'un topos son topos classifiant :

Lemme VIII.2.5. –

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

(i) *Pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathcal{E}}(G)$ des objets X de $\mathcal{E}$ munis d'une action $G \times X \to X$ de G est un topos aussi noté BG et appelé le topos classifiant de G.*

De plus, si $\mathcal{E}$ est le topos des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J et que le faisceau G est représentable par un objet de $\mathcal{A}$ qui est carrable (au sens que son produit avec tout objet de $\mathcal{A}$ est représentable dans $\mathcal{A}$), alors BG est équivalent à la catégorie des faisceaux sur le site $(\mathcal{A}', J')$ ainsi défini :

- *les objets de $\mathcal{A}'$ sont les objets a de $\mathcal{A}$,*
- *les morphismes $a \to b$ de $\mathcal{A}'$ sont les morphismes $a \to G \times b$ de $\mathcal{A}$ ou, ce qui revient au même, les morphismes $G \times a \to G \times b$ de $\mathcal{A}$ qui respectent les actions de G sur $G \times a$ et $G \times b$,*
- *une famille $(a_i \to a)_{i \in I}$ de morphismes de $\mathcal{A}'$ est J'-couvrante si la famille associée $(G \times a_i \to G \times a)_{i \in I}$ de morphismes de $\mathcal{A}$ est J-couvrante.*

(ii) *Tout morphisme de groupes internes de $\mathcal{E}$*

$$G_1 \longrightarrow G_2$$

induit un morphisme de topos classifiants

$$BG_1 \longrightarrow BG_2\,.$$

En particulier, pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$, les morphismes $1 \to G$ et $G \to 1$ entre G et le groupe interne trivial 1 induisent deux morphismes canoniques

$$\mathcal{E} \longrightarrow BG \qquad \text{et} \qquad BG \longrightarrow \mathcal{E}$$

dont le composé est le foncteur identique $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$.

(iii) *Pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$, la catégorie des morphismes*

$$\mathcal{E} \longrightarrow BG$$

dont le composé avec le morphisme canonique $BG \to \mathcal{E}$ est $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est équivalente à la catégorie (qui est un groupoïde) des "torseurs à droite" de G c'est-à-dire des objets T de $\mathcal{E}$ munis d'une action à droite $T \times G \to T$ de G telle que :

- *cette action est principale au sens que le morphisme induit*

$$\begin{array}{rcl} T \times G & \longrightarrow & T \times T \\ (t,g) & \longmapsto & (t, t \cdot g) \end{array}$$

  est un isomorphisme,

- *le morphisme vers l'objet final 1 de $\mathcal{E}$*

$$T \longrightarrow 1$$

  est un épimorphisme.

Cette équivalence associe à tout torseur à droite T le morphisme

$$u = (u^*, u_*) : \mathcal{E} \longrightarrow BG$$

dont la composante d'image réciproque u^* associe à tout objet X de BG le quotient

$$u^*(X) = G \backslash (T \times X)$$

de $T \times X$ par l'action à gauche de G

$$\begin{array}{rcl} G \times (T \times X) & \longrightarrow & T \times X \,, \\ (g,(t,x)) & \longmapsto & (t \cdot g^{-1}, g \cdot x) \,, \end{array}$$

et la composante d'image directe u_* est le foncteur exponentiel

$$Y \longmapsto u_*(Y) = Y^T$$

où chaque Y^T est muni de l'action à gauche de G définie par l'action à gauche de G sur T

$$\begin{array}{rcl} G \times T & \longrightarrow & T \,, \\ (g,t) & \longmapsto & t \cdot g^{-1} \,. \end{array}$$

Remarques :

(i) Plus généralement, si M est un monoïde interne du topos $\mathcal{E}$, la catégorie BM des objets X de $\mathcal{E}$ munis d'une action de M c'est-à-dire d'une flèche de $\mathcal{E}$

$$M \times X \xrightarrow{a} X$$

rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M \times M \times X \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times a"'] & M \times X \arrow[d, "a"] \\ M \times X \arrow[r, "a"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times X \arrow[rr, "1 \times \mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "="'] & & M \times X \arrow[dl, "m"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est un topos, appelé le topos classifiant de M.

La preuve en est identique à celle de (i).

(ii) Tout morphisme de monoïdes internes du topos $\mathcal{E}$

$$\rho : M_1 \longrightarrow M_2$$

définit un morphisme de topos

$$(\rho^*, \rho_*) : BM_1 \longrightarrow BM_2$$

dont la composante d'image réciproque $\rho^* : BM_2 \to BM_1$ consiste à composer les actions de M_2 sur des objets de X avec $\rho : M_1 \to M_2$ pour en déduire des actions de M_1.

En particulier, pour tout monoïde interne M, le topos classifiant BM est muni de deux morphismes canoniques de topos

$$\mathcal{E} \longrightarrow BM \qquad \text{et} \qquad BM \longrightarrow \mathcal{E}$$

et, si $M^\times$ désigne le groupe interne des éléments inversibles de M, défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} M^\times \arrow[r] \arrow[d] & M \times M \arrow[d, "m"] \\ 1 \arrow[r, "1"] & M \end{tikzcd}$$

alors le morphisme canonique $M^\times \to M$ induit un morphisme de topos

$$BM^\times \longrightarrow BM\,.$$

Exemple :

En particulier, si $\mathcal{E}$ est le topos des ensembles et G un groupe [ou un monoïde], le topos BG est la catégorie des ensembles munis d'une action de G, c'est-à-dire des préfaisceaux sur G^{op} vu comme une petite catégorie.

Pour tout groupe G, la catégorie des points de BG est équivalente à celle dont l'unique objet est G muni de l'action de G par translation à droite et dont les morphismes sont les éléments de G agissant par translation à gauche.

Démonstration :

(i) Le topos $\mathcal{E}$ est équivalent à la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur toute petite sous-catégorie pleine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ qui est séparante, munie de la topologie J pour laquelle une famille de morphismes de $\mathcal{A}$ est couvrante si elle est globalement épimorphique dans $\mathcal{E}$.

De plus, si G est un groupe interne de $\mathcal{E}$, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ qui contient l'objet G et le produit avec G de tout objet de $\mathcal{A}$.

Cela nous ramène à montrer la seconde partie de (i), où $\mathcal{E}$ est le topos des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J et le faisceau G est représentable par un objet carrable de $\mathcal{A}$ encore noté G. On dispose du foncteur de Yoneda $y : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$, du foncteur de faisceautisation $j^* : \widehat{\mathcal{A}} \to \widehat{\mathcal{A}}_J = \mathcal{E}$ et de son adjoint à droite $j_* : \mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J \to \widehat{\mathcal{A}}$. Par hypothèse, $y(G)$ est un faisceau donc le morphisme de multiplication

$$j^*y(G) \times j^*y(G) \longrightarrow j^*y(G)$$

provient d'un unique morphisme de $\widehat{\mathcal{A}}$

$$y(G) \times y(G) \longrightarrow y(G)$$

c'est-à-dire d'un unique morphisme de $\mathcal{A}$

$$G \times G \xrightarrow{m} G$$

lequel rend nécessairement commutatif le carré :

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times m"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

On définit un foncteur

$$BG \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}'_{J'}$$

en associant à tout faisceau X sur $(\mathcal{A}, J)$ muni d'une action de $y(G)$ le préfaisceau $\widetilde{X}$ sur $\mathcal{A}'$ tel que

- pour tout objet a de $\mathcal{A}$ c'est-à-dire de $\mathcal{A}'$, $\widetilde{X}(a)$ est l'ensemble des morphismes

$$y(G) \times j^* y(a) \longrightarrow X(a)$$

qui rendent commutatif le carré :

$$\begin{tikzcd} y(G) \times y(G) \times j^* y(a) \arrow[r] \arrow[d] & y(G) \times X(a) \arrow[d] \\ y(G) \times j^* y(a) \arrow[r] & X(a) \end{tikzcd}$$

- pour tout morphisme $a \to b$ de $\mathcal{A}'$ c'est-à-dire tout morphisme

$$y(G) \times j^* y(a) \longrightarrow y(G) \times j^* y(b)$$

qui rend commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} y(G) \times y(G) \times j^* y(a) \arrow[r] \arrow[d] & y(G) \times y(G) \times j^* y(b) \arrow[d] \\ y(G) \times j^* y(a) \arrow[r] & y(G) \times j^* y(b) \end{tikzcd}$$

l'application $\widetilde{X}(b) \to \widetilde{X}(a)$ est la composition avec le morphisme $y(G) \times j^* y(a) \to y(G) \times j^* y(b)$.

Le préfaisceau $\widetilde{X}$ est un faisceau pour la topologie J' par définition de J' à partir de J, puisque X est un faisceau pour J.

En sens inverse, on définit un foncteur

$$\widehat{\mathcal{A}}'_{J'} \longrightarrow BG$$

en associant à tout faisceau F sur $(\mathcal{A}', J')$ l'objet de $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{A}}_J$

$$X_F = \varinjlim_{(a,x) \in \int F} y(G) \times j^* y(a)$$

muni de l'action de $y(G)$

$$y(G) \times X_F \longrightarrow X_F$$

induite par celle sur les $y(G)\times j^*y(a)$ du fait que, dans le topos $\mathcal{E}$, le produit avec $y(G)$ respecte les colimites.

Le foncteur composé

$$BG \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}'_{J'} \longrightarrow BG$$

est isomorphe à l'identité puisque tout faisceau X sur $(\mathcal{A},J)$ muni d'une action de $y(G)$ s'identifie à la colimite

$$\varinjlim\ y(G)\times j^*y(a)$$

calculée sur le diagramme des objets a de $\mathcal{A}$ munis d'un morphisme qui respecte les actions de $y(G)$

$$y(G)\times j^*y(a) \longrightarrow X\,.$$

Enfin, le foncteur composé

$$\widehat{\mathcal{A}}'_{J'} \longrightarrow BG \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}'_{J'}$$

est isomorphe à l'identité puisque, pour tout faisceau F sur $(\mathcal{A}',J')$ avec

$$X_F = \varinjlim_{(a,x)\in\int F} y(G)\times j^*y(a)\,,$$

le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ b & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(j^*y(b),X_F) \end{array}$$

est la J-faisceautisation du préfaisceau

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ b & \longmapsto & \varinjlim\limits_{(a,x)\in\int F} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}}(y(b),y(G)\times j^*y(a))\,. \end{array}$$

Ainsi, les catégories BG et $\widehat{\mathcal{A}}'_{J'}$ sont équivalentes et BG est un topos.

(ii) La composition avec un morphisme de groupes internes $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ de toute action de G_2 sur un objet X de $\mathcal{E}$ définit une action de G_1 sur X.

Cela induit un foncteur

$$\rho^* : BG_2 \longrightarrow BG_1$$

qui respecte les limites et les colimites arbitraires. Par conséquent, ce foncteur admet un adjoint à droite

$$\rho_* : BG_1 \longrightarrow BG_2$$

et la paire

$$(\rho^*,\rho_*) : BG_1 \longrightarrow BG_2$$

forme un morphisme de topos.

On remarque enfin que pour deux morphismes de groupes internes

$$G_1 \xrightarrow{\rho} G_2 \xrightarrow{\sigma} G_3\,,$$

on a

$$(\sigma\circ\rho)^* = \rho^*\circ\sigma^*$$

et donc

$$((\sigma\circ\rho)^*,(\sigma\circ\rho)_*) = (\sigma^*,\sigma_*)\circ(\rho^*,\rho_*)\,.$$

(iii) On peut supposer que le topos $\mathcal{E}$ est la catégorie $\widehat{\mathcal{A}}_J$ des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J. Alors G est un faisceau de groupes sur $\mathcal{A}$ et un torseur (à droite) T de G est un faisceau muni d'une action à droite

$$T \times G \longrightarrow T$$

telle que

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{pour tout objet } a \text{ de } \mathcal{A}, \text{ tout élément de } T(a) \text{ définit une bijection} \\ \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G(a) & \longrightarrow & T(a)\,, \\ g & \longmapsto & t \cdot g\,, \end{array} \\ \bullet \quad \text{tout objet } a \text{ de } \mathcal{A} \text{ admet une famille couvrante } (a_i \to a)_{i \in I} \text{ pour la topologie } J \text{ telle que chaque} \\ \quad\;\; T(a_i) \text{ soit non vide.} \end{cases}$$

Il en résulte en particulier que la catégorie des G-torseurs (à droite) est un groupoïde. En effet, tout morphisme de G-torseurs

$$T_1 \longrightarrow T_2$$

est localement un isomorphisme, donc est un isomorphisme.

Pour tout G-torseur à droite T, le foncteur associé

$$\begin{array}{rcl} u^* : BG & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ X & \longmapsto & G\backslash(T \times X) \end{array}$$

est localement isomorphe au foncteur d'oubli de l'action de G

$$\begin{array}{rcl} BG & \longrightarrow & \mathcal{E}\,, \\ X & \longmapsto & X \end{array}$$

donc il respecte les limites et colimites arbitraires. Il admet par conséquent un adjoint à droite

$$u_* : \mathcal{E} \longrightarrow BG$$

avec lequel il forme un morphisme de topos

$$(u^*, u_*) : \mathcal{E} \longrightarrow BG\,.$$

Pour tout objet Y de $\mathcal{E}$ et tout objet X de BG, se donner un morphisme G-équivariant

$$X \longrightarrow Y^T$$

équivaut à se donner un morphisme G-équivariant

$$T \times X \longrightarrow Y$$

ou, ce qui revient au même, un morphisme de $\mathcal{E}$

$$G\backslash(T \times X) \longrightarrow Y\,.$$

Cela montre que

$$u_*(Y) = Y^T\,.$$

Si X est muni de l'action triviale de G, on a l'identification

$$G\backslash(T \times X) = (G\backslash T) \times X = X$$

ce qui prouve que le morphisme de topos composé

$$\mathcal{E} \longrightarrow BG \longrightarrow \mathcal{E}$$

est l'identité du topos $\mathcal{E}$.

Réciproquement, considérons un morphisme de topos

$$(u^*, u_*) : \mathcal{E} \longrightarrow BG$$

dont le composé avec $BG \to \mathcal{E}$ est l'identité de $\mathcal{E}$. Autrement dit, on a pour tout objet X de $\mathcal{E}$ muni de l'action triviale de G

$$u^*(X) = X\,.$$

En particulier, si G lui-même est muni de l'action triviale de G, on a

$$u^*(G) = G\,.$$

D'autre part, notons G_t l'objet G muni de l'action sur lui-même par translation à gauche. On observe que le morphisme de multiplication

$$m : G \times G \longrightarrow G$$

peut-être vu comme un morphisme de BG

$$G_t \times G \xrightarrow{m} G_t$$

qui forme avec la première projection

$$\mathrm{pr}_1 : G_t \times G \longrightarrow G_t$$

un isomorphisme de BG

$$(\mathrm{pr}_1, m) : G_t \times G \longrightarrow G_t \times G_t\,.$$

Notant

$$T = u^*(G_t)\,,$$

le transformé de $m : G_t \times G \to G_t$ par u^* est un morphisme

$$T \times G \longrightarrow T\,.$$

Comme le carré de BG

$$\begin{tikzcd} G_t \times G \times G \arrow[r] \arrow[d] & G_t \times G \arrow[d] \\ G_t \times G \arrow[r] & G_t \end{tikzcd}$$

est commutatif, il en est de même de son transformé par u^*

$$\begin{tikzcd} T \times G \times G \arrow[r] \arrow[d] & T \times G \arrow[d] \\ T \times G \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

ce qui signifie que T est muni d'une action à droite de G.

De plus, le transformé par u^* de l'isomorphisme

$$(\mathrm{pr}_1, m) : G_t \times G \longrightarrow G_t \times G_t$$

est un isomorphisme
$$(\mathrm{pr}_1, m) : T \times G \longrightarrow T \times T\,.$$
Autrement dit, l'action de G sur T est principale.

Si 1 désigne l'objet final de $\mathcal{E}$ muni de l'action triviale de G, le morphisme canonique de $\mathcal{E}$
$$G_t \longrightarrow 1$$
est un morphisme de BG, et c'est un épimorphisme de BG puisque c'est un épimorphisme de $\mathcal{E}$. Comme le foncteur u^* préserve les épimorphismes, on en déduit que le morphisme induit de $\mathcal{E}$
$$T = u^*(G_t) \longrightarrow u^*(1) = 1$$
est un épimorphisme.

Ainsi, T est un G-torseur à droite.

Montrons que les deux foncteurs
$$u^* : BG \longrightarrow \mathcal{E}$$
et
$$\begin{array}{rcl} v^* : BG & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ X & \longmapsto & G\backslash(T \times X) \end{array}$$
sont canoniquement isomorphes.

Si X est un objet de BG, notons X_s l'objet sous-jacent de $\mathcal{E}$ muni de l'action triviale de G.

Dans BG on dispose de trois morphismes
$$\begin{array}{rcl} p : G_t \times X_s & \longrightarrow & X\,, \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcl} G_t \times G \times X_s & \rightrightarrows & G_t \times X_s\,, \\ (g,g',s) & \mapsto & (gg',x)\,, \\ (g,g',x) & \mapsto & (g, g' \cdot x) \end{array}$$
qui identifient X à la colimite
$$\mathrm{Coker}\,(G_t \times G \times X_s \rightrightarrows G_t \times X_s)\,.$$
Donc $u^*(X)$ s'identifie à la colimite
$$\mathrm{Coker}\,(T \times G \times X \rightrightarrows T \times X)$$
des deux morphismes de $\mathcal{E}$
$$\begin{array}{rcl} T \times G \times X & \rightrightarrows & T \times X\,, \\ (t,g,x) & \mapsto & (t \cdot g, x) \\ (t,g,x) & \mapsto & (t, g \cdot x) \end{array}$$
c'est-à-dire au quotient
$$v^*(X) = G\backslash(T \times X)\,.$$
Cela démontre (iii). $\square$

On déduit aussitôt des deux lemmes précédents :

Corollaire VIII.2.6. –

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

(i) *Pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$ agissant sur un objet S de $\mathcal{E}$, la catégorie BG/S des objets X de $\mathcal{E}$ munis d'une action de G et d'un morphisme G-équivariant*

$$X \longrightarrow S$$

est un topos.

(ii) *Pour tout morphisme de groupes internes de $\mathcal{E}$*

$$\rho : G_1 \longrightarrow G_2$$

et tous objets S_1 et S_2 de $\mathcal{E}$ munis d'actions de G_1 et G_2 et reliés par un morphisme G_1-équivariant

$$u : S_1 \longrightarrow S_2 \,,$$

ρ et u induisent un morphisme de topos

$$BG_1/S_1 \longrightarrow BG_2/S_2 \,.$$

(iii) *En particulier, pour tout groupe interne G de $\mathcal{E}$, tout morphisme de BG*

$$S_1 \longrightarrow S_2$$

définit un morphisme de topos

$$BG/S_1 \longrightarrow BG/S_2 \,.$$

Il fait de BG/S_1 un sous-topos (ouvert) de BG/S_2 si et seulement si la flèche

$$S_1 \longrightarrow S_2$$

est un monomorphisme de BG ou, ce qui revient au même, de $\mathcal{E}$.

Remarque :

Toutes les conclusions de ce corollaire valent de la même façon si G, G_1, G_2 sont des monoïdes internes de $\mathcal{E}$.

□

f) Groupe interne des symétries d'un morphisme de topos et factorisation canonique

On a maintenant l'important théorème de factorisation :

Théorème VIII.2.7. –

Soit un morphisme de topos

$$u = (u^*, u_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \,.$$

Alors :

(i) *Le foncteur contravariant*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{Aut}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right) \end{array}$$

est représentable par un groupe interne de $\mathcal{E}$

$$G = \mathcal{A}ut(u)$$

que l'on appelle le groupe interne des symétries du morphisme de topos $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

(ii) *Le morphisme* $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *se factorise canoniquement comme le composé du morphisme canonique*

$$\mathcal{E} \longrightarrow BG$$

et d'un morphisme de topos

$$BG \longrightarrow \mathcal{E}'\,.$$

Remarques :

(i) Le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{End}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right) \end{array}$$

est également représentable par un objet de $\mathcal{E}$

$$M = \mathcal{E}nd(u)$$

qui est un monoïde interne de $\mathcal{E}$.

Son groupe interne $M^\times$ des éléments inversibles n'est autre que le groupe interne des symétries $M^\times = G = \mathcal{A}ut(u)$ du morphisme de topos $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

(ii) La factorisation canonique de u

$$BG \longrightarrow \mathcal{E}'$$

se factorise elle-même canoniquement comme le composé du morphisme associé à l'homomorphisme de monoïdes internes $G = M^\times \to M$

$$BG \longrightarrow BM$$

et d'un morphisme de topos

$$BM \longrightarrow \mathcal{E}'\,.$$

Exemples :

(i) Si $\mathcal{E}' = BG$ [resp. $\mathcal{E}' = BM$] est le topos classifiant d'un groupe interne [resp. d'un monoïde interne] du topos $\mathcal{E}$ et

$$u : \mathcal{E} \longrightarrow BG \qquad [\text{resp. } u : \mathcal{E} \longrightarrow BM\ ]$$

est le morphisme de topos canonique, alors le morphisme naturel de groupes internes [resp. de monoïdes internes]

$$G \longrightarrow \mathcal{A}ut(u) \qquad [\text{resp. } M \longrightarrow \mathcal{E}nd(u)\ ]$$

est un isomorphisme.

(ii) Si $\mathcal{E} = \mathrm{Ens}$ est le topos des ensembles,

$$u = (u^*, u_*) = \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}'$$

est un point de $\mathcal{E}'$ et

$$G = \mathcal{A}ut(u) \qquad [\text{resp. } M = \mathcal{E}nd(u)\ ]$$

est le groupe de ses automorphismes [resp. le monoïde de ses endomorphismes].

Démonstration :

(i) On peut supposer que $\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{A}}_J$ est la catégorie des faisceaux sur une petite catégorie $\mathcal{A}$ munie d'une topologie J.

On sait que, pour tout topos $\mathcal{E}''$, la catégorie localement petite des morphismes de topos

$$\mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{A}}_J$$

est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie des foncteurs

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}''$$

constituée des foncteurs plats et J-continus.

On en déduit que, pour tout objet S de $\mathcal{E}$, les automorphismes [resp. les endomorphismes] du morphisme de topos

$$\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'$$

sont ceux du foncteur

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/S$$

composé du foncteur canonique

$$\ell : \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}_J = \mathcal{E}'\,,$$

de

$$u^* : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

et de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/S\,, \\ X & \longmapsto & X \times S\,. \end{array}$$

Autrement dit, ce sont les familles d'automorphismes [resp. d'endomorphismes] au-dessus de S

$$\alpha_a : u^*\ell(a) \times S \longrightarrow u^*\ell(a) \times S\,, \quad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,,$$

telles que, pour toute flèche $f : a \to b$ de $\mathcal{A}$, le carré induit

$$\begin{tikzcd} u^*\ell(a) \times S \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "u^*\ell(f)\times \mathrm{id}_S"'] & u^*\ell(a) \times S \arrow[d, "u^*\ell(f)\times \mathrm{id}_S"] \\ u^*\ell(b) \times S \arrow[r, "\alpha_b"] & u^*\ell(b) \times S \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il en résulte que le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\ S & \longmapsto & \mathrm{End}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right) \end{array}$$

est représentable par la limite M du diagramme constitué des exponentielles

$$(u^*\ell(a))^{u^*\ell(a)}\,, \quad a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,,$$

et des exponentielles

$$(u^*\ell(b))^{u^*\ell(a)}\,, \quad a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})\,,$$

reliées par les flèches

$$\begin{tikzcd}
(u^*\ell(a))^{u^*\ell(a)} \arrow[dr] & & (u^*\ell(b))^{u^*\ell(b)} \arrow[dl] \\
& (u^*\ell(b))^{u^*\ell(a)} &
\end{tikzcd}$$

définies par la composition à gauche et à droite avec la flèche

$$u^*\ell(f) : u^*\ell(a) \longrightarrow u^*\ell(b)$$

associée à toute flèche de $\mathcal{A}$

$$f : a \longrightarrow b\,.$$

Enfin, le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}\,, \\
S & \longmapsto & \mathrm{Aut}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right)
\end{array}$$

est représentable par le groupe interne

$$G = M^{\times}$$

des éléments inversibles du monoïde interne M.

(ii) Pour tout objet X de $\mathcal{E}'$ et tout objet S de $\mathcal{E}$, le groupe

$$G(S) = \mathrm{Aut}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right)$$

$$[\text{resp. le monoïde} \quad M(S) = \mathrm{End}\left(\mathcal{E}/S \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'\right)]$$

agit naturellement sur l'ensemble

$$\mathrm{Hom}(S, u^*(X))$$

et ces actions indexées par les objets S de $\mathcal{E}$ sont compatibles avec les morphismes de changement de base

$$S' \longrightarrow S\,.$$

Autrement dit, pour tout objet X de $\mathcal{E}'$, l'objet $u^*(X)$ de $\mathcal{E}$ est munie d'une action naturelle de G [resp. M]

$$G \times u^*(X) \longrightarrow u^*(X) \quad [\text{resp. } M \times u^*(X) \longrightarrow u^*(X)\ ].$$

De plus, ces actions sont compatibles avec les morphismes de $\mathcal{E}$

$$u^*(X_1) \longrightarrow u^*(X_2)$$

associés aux morphismes

$$X_1 \longrightarrow X_2$$

de $\mathcal{E}'$.

Cela signifie que le foncteur

$$u^* : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$$

se factorise canoniquement en

$$\mathcal{E}' \longrightarrow BM \longrightarrow BG \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Comme le foncteur $u^* : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ respecte les colimites arbitraires et les limites finies, il en est de même des foncteurs

$$\mathcal{E}' \longrightarrow BM$$

et

$$\mathcal{E}' \longrightarrow BG$$

qui sont donc les composantes d'images réciproques de morphismes de topos

$$BM \longrightarrow \mathcal{E}'$$

et

$$BG \longrightarrow \mathcal{E}'$$

qui s'inscrivent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[dr, "u"'] & BG \arrow[r] \arrow[d] & BM \arrow[dl] \\
& \mathcal{E}' &
\end{tikzcd}$$

Cela termine la démonstration du théorème. $\square$

3 Topologies sous-canoniques et topologie canonique

a) Caractérisation des topologies sous-canoniques et définition de la topologie canonique

Pour toute catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{A}$, le choix d'une topologie J sur $\mathcal{A}$ définit un topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$ relié à $\mathcal{A}$ par le composé

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J$$

du foncteur de Yoneda y et du foncteur de faisceautisation j^*. Ainsi, la catégorie $\mathcal{A}$ est envoyée par ℓ dans une catégorie localement petite qui possède toutes les propriétés remarquables des topos énoncés dans le théorème VIII.1.7 : elle a des petites limites et colimites arbitraires, les exponentielles y sont toujours représentables, etc.

Autrement dit, chaque topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$ apparaît comme une sorte de complétion de $\mathcal{A}$ dans laquelle toutes les constructions catégoriques sont possibles. Le passage de $\mathcal{A}$ à $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est particulièrement intéressant lorsque le foncteur $\ell : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}_J$ est pleinement fidèle. Voici une caractérisation des topologies J qui possèdent cette propriété :

Lemme VIII.3.1. –

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie (essentiellement) petite munie d'une topologie J. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *Le foncteur canonique*

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{y} \mathcal{A} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J$$

est pleinement fidèle.

(2) *Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, le préfaisceau*

$$y(a) = \mathrm{Hom}(\bullet, a)$$

est un faisceau pour la topologie J.

(3) *Pour tout crible J-couvrant C d'un objet a de $\mathcal{A}$ et pour tout morphisme $f : b \to a$ de $\mathcal{A}$, on a*

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in f^* C} b' .$$

Démonstration :

L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) résulte de ce que, d'après le lemme de Yoneda, le foncteur $y : \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ est pleinement fidèle et de ce que le foncteur j^* laisse invariant tout préfaisceau qui est un faisceau pour la topologie J.

Pour montrer l'implication (3) $\Rightarrow$ (2), considérons deux objets a et b de $\mathcal{A}$ ainsi qu'un crible J-couvrant C de b. Sous l'hypothèse (3), on a

$$\mathrm{Hom}(b, a) = \varprojlim_{(b' \to b) \in C} \mathrm{Hom}(b', a)$$

c'est-à-dire

$$y(a)(b) = \varinjlim_{(b' \to b) \in C} y(a)(b') .$$

Autrement dit, l'objet $y(a)$ de $\widehat{\mathcal{A}}$ est un faisceau pour la topologie J.

Enfin, montrons l'implication (1) $\Rightarrow$ (3). Comme l'image réciproque par tout morphisme $b \to a$ de $\mathcal{A}$ de tout crible J-couvrant de a est un crible J-couvrant de b, il suffit de prouver que pour tout crible J-couvrant C d'un objet b de $\mathcal{A}$, on a dans la catégorie $\mathcal{A}$

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in C} b' .$$

Or on a certainement dans le topos $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\ell(b) = \varinjlim_{(b' \to b) \in C} \ell(b')$$

et donc, pour tout objet a de $\mathcal{A}$,

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(b), \ell(a)) = \varprojlim_{(b' \to b) \in C} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(b'), \ell(a)) .$$

Comme le foncteur ℓ est pleinement fidèle par hypothèse, cela s'écrit encore

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b, a) = \varprojlim_{(b' \to b) \in C} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b', a) .$$

Cela signifie comme voulu

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in C} b' .$$

□

On déduit de ce lemme :

Proposition VIII.3.2. –

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie essentiellement petite.

(i) *Il existe une topologie J_c de $\mathcal{A}$, appelée la "topologie canonique", telle qu'un crible C d'un objet a de $\mathcal{A}$ soit couvrant si et seulement si on a pour tout morphisme $f : b \to a$ la formule dans la catégorie $\mathcal{A}$*

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in f^* C} b' \, .$$

(ii) *Pour qu'une topologie J de $\mathcal{A}$ soit telle que le foncteur canonique*

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J$$

soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que

$$J \subseteq J_c \, .$$

On dit dans ce cas que J est une topologie sous-canonique.

Remarques :

(i) Ainsi, $\widehat{\mathcal{A}}_{J_c}$ est le plus petit sous-topos de $\widehat{\mathcal{A}}$ qui contient l'image de $\mathcal{A}$ dans $\widehat{\mathcal{A}}$ par le foncteur de Yoneda.

(ii) On dit qu'une famille de morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$

$$a_i \longrightarrow a \, , \qquad i \in I \, ,$$

est "épimorphique stricte" s'il existe une famille d'objets c_j de $\mathcal{C}, j \in J$, s'inscrivant dans des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} c_j & \longrightarrow & a_{i'_j} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ a_{i_j} & \longrightarrow & a \end{array}$$

et telle que

$$a = \operatorname{coker} \left(\coprod_{j \in J} c_j \rightrightarrows \coprod_{i \in I} a_i \right)$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Hom}(a, e) = \ker \left(\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(a_i, e) \rightrightarrows \prod_{k \in K} \operatorname{Hom}(c_k, e) \right)$$

pour tout objet e de $\mathcal{C}$.

On dit qu'une telle famille de morphismes $(a_i \to a)_{i \in I}$ est "épimorphique stricte universelle" si, pour tout morphisme $b \to a$ de $\mathcal{C}$, il existe une famille d'objets b_k de $\mathcal{C}$, $k \in K$, s'inscrivant dans des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} b_k & \longrightarrow & a_{i_k} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ b & \longrightarrow & a \end{array}$$

et telle que la famille des morphismes

$$b_k \longrightarrow b \, , \qquad k \in K \, ,$$

soit “épimorphique stricte”.

On voit qu'une famille de morphismes d'une catégorie essentiellement petite $\mathcal{A}$

$$a_i \longrightarrow a\,, \qquad i \in I\,,$$

est couvrante pour la topologie canonique J_c de $\mathcal{A}$ si et seulement si elle est “épimorphique stricte universelle”.

(iii) Les notions de famille “épimorphique stricte” de morphismes et de famille “épimorphique stricte universelle” gardent un sens dans n'importe quelle catégorie $\mathcal{C}$ localement petite (mais pas nécessairement essentiellement petite).

En appelant couvrants les cribles engendrés par les familles épimorphiques strictes universelles, on définit une topologie de $\mathcal{C}$ encore appelée la topologie canonique.

(iv) Une famille de morphismes carrables

$$a_i \longrightarrow a\,, \qquad i \in I\,,$$

est épimorphique stricte si

$$a = \operatorname{coker}\left(\coprod_{i,i'\in I} a_i \times_a a_{i'} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} a_i\right).$$

Elle est épimorphique stricte universelle c'est-à-dire couvrante pour la topologie canonique si, pour tout morphisme $b \to a$, on a

$$b = \operatorname{coker}\left(\coprod_{i,i'\in I} b \times_a a_i \times_a a_{i'} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} b \times_a a_i\right).$$

Démonstration :

(i) Il faut vérifier que J_c satisfait les trois axiomes de maximalité, stabilité et transitivité qui définissent la notion de topologie de Grothendieck.

L'axiome de stabilité est vérifié par définition de J_c.

L'axiome de maximalité résulte de ce que le crible maximal C d'un objet a engendré par le morphisme $\mathrm{id}_a : a \to a$ vérifie automatiquement la formule

$$a = \varinjlim_{(a' \to a) \in C} a'\,.$$

Enfin, l'axiome de transitivité est satisfait puisque, si C et C' sont deux cribles d'un objet a tels que

$$a = \varinjlim_{(f : b \to a) \in C} b$$

et

$$b = \varinjlim_{(b' \to b) \in f^* C'} b'\,, \qquad \forall\,(f : b \to a) \in C\,,$$

on a nécessairement

$$a = \varinjlim_{(a' \to a) \in C'} a'\,.$$

(ii) est l'équivalence des conditions (1) et (3) du lemme VIII.3.1. □

b) Problèmes de représentabilité et topologies sous-canoniques ou canoniques

La considération de topologies sous-canoniques ou de la topologie canonique permet un nouveau traitement des problèmes de représentabilité de foncteurs ou de constructions catégoriques telles que les limites, les exponentielles ou les colimites :

Corollaire VIII.3.3. –

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie (essentiellement) petite munie d'une topologie sous-canonique J et donc du foncteur pleinement fidèle

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^*} \widehat{\mathcal{A}}_J \,.$$

Alors :

(i) *Pour qu'un foncteur contravariant*

$$F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

soit représentable, il est nécessaire que ce soit un faisceau pour la topologie J.

(ii) *Pour tout petit carquois D et tout D-diagramme de $\mathcal{A}$*

$$\begin{array}{rcl} a_\bullet : D & \longrightarrow & \mathcal{A}\,, \\ d & \longmapsto & a_d\,, \end{array}$$

la limite $\varprojlim\limits_{D} a_\bullet$ est bien définie dans $\mathcal{A}$ si et seulement si l'objet de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\varprojlim_{D} \ell(a_\bullet)$$

est représentable comme préfaisceau par un objet de $\mathcal{A}$ qui n'est alors autre que

$$\varprojlim_{D} a_\bullet \,.$$

(iii) *Pour tout objet a de $\mathcal{A}$ qui est carrable (c'est-à-dire tel que le produit $a \times x$ avec tout objet x de $\mathcal{A}$ soit représentable) et pour tout objet b de a, l'exponentielle*

$$b^a$$

est bien définie dans $\mathcal{A}$ si et seulement si l'objet de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\ell(b)^{\ell(a)}$$

est représentable comme préfaisceau par un objet de $\mathcal{A}$ qui n'est alors autre que

$$b^a \,.$$

(iv) *Soient un petit carquois D et un D-diagramme de $\mathcal{A}$*

$$\begin{array}{rcl} a_\bullet : D & \longrightarrow & \mathcal{A}\,, \\ d & \longmapsto & a_d\,, \\ \left(d_1 \xrightarrow{u} d_2\right) & \longmapsto & \left(a_{d_1} \xrightarrow{a_u} a_{d_2}\right) \,. \end{array}$$

Si l'objet de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\varinjlim_{D} \ell(a_\bullet)$$

est représentable par un objet a de $\mathcal{A}$, on a nécessairement :

(0) *L'objet a est une colimite du D-diagramme $a_\bullet$ de $\mathcal{A}$.*

(1) *La famille des morphismes*

$$a_d \longrightarrow a \,, \quad d \in \mathrm{Ob}(D) \,,$$

est épimorphique stricte universelle.

(2) *Pour tout carré commutatif de a*

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & a_{d'} \arrow[d] \\ a_d \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

il existe une famille épimorphique stricte universelle de morphismes

$$b' \longrightarrow b$$

tels que les composés $a_d \leftarrow b' \rightarrow a_{d'}$ s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & b' \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ a_d = a_{d_0} \arrow[r, leftrightarrow] & a_{d_1} \arrow[r, leftrightarrow] & \cdots \arrow[r, leftrightarrow] & a_{d_n} = a_{d'} \end{tikzcd}$$

où $d_0 = d$, $d'_n = d'$ et chaque $a_{d_{i-1}} \leftrightarrow a_{d_i}$ est un morphisme a_u

$$a_{d_{i-1}} \longrightarrow a_{d_i} \quad \text{ou} \quad a_{d_i} \longrightarrow a_{d_{i-1}}$$

associé à une flèche u de D

$$d_{i-1} \longrightarrow d_i \quad \text{ou} \quad d_i \longrightarrow d_{i-1} \,.$$

Réciproquement, si le D-diagramme $a_\bullet$ de $\mathcal{A}$ admet une colimite a dans $\mathcal{A}$ qui satisfait les conditions (1) *et* (2) *ci-dessus, et si $J = J_c$ est la topologie canonique de $\mathcal{A}$, on a*

$$\ell(a) = \varinjlim_D \ell(a_\bullet)$$

dans la complétion canonique $\widehat{\mathcal{A}}_{J_c}$ de $\mathcal{A}$.

Autrement dit, le préfaisceau représenté par $a = \varinjlim_D a_\bullet$

$$y(a)$$

est la faisceautisation pour la topologie canonique J_c du préfaisceau

$$\varinjlim_D y(a_\bullet)$$

calculé dans $\widehat{\mathcal{A}}$.

Remarques :

(i) La condition nécessaire de (i) n'est bien sûr pas suffisante en général, même si J est la topologie canonique J_c de $\mathcal{A}$.

(ii) Si J est une topologie sous-canonique et

$$F : \mathcal{A}^{\rm op} \longrightarrow {\rm Ens}$$

est un foncteur contravariant qui n'est pas un faisceau pour la topologie J, il ne peut être représentable.

Il est alors naturel de remplacer F par son faisceautisé pour la topologie J

$$j^* J$$

dans l'espoir que $j^* F$ soit représentable.

S'il l'est, c'est un faisceau non seulement pour la topologie J mais même pour la topologie canonique J_c.

(iii) Dans les conditions de (iv), supposons que le D-diagramme $a_\bullet$ soit constitué de morphismes carrables $a_d \to a_{d'}$ et admette une colimite a telle que les morphismes $a_d \to a$ soient également carrables.

Alors les conditions (1) et (2) équivalent aux conditions suivantes :

(A) Pour tout morphisme $b \to a$, on a

$$b = \varinjlim_{D} b \times_a a_\bullet \, .$$

(B) Pour tous objets d, d' de D, considérant la famille des carquois finis D_n

$$d = d_0 \longleftrightarrow d_1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow d_n = d'$$

constitués d'objets $d_0 = d, d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n = d'$ de D et de flèches $d_{i-1} \to d_i$ ou $d_i \to d_{i-1}$ de D notées $d_{i-1} \leftrightarrow d_i$, la famille des morphismes de $\mathcal{A}$

$$\varprojlim_{D_n} a_\bullet \longrightarrow a_d \times_a a_{d'}$$

est épimorphique stricte universelle.

Exemple :

Soit X un objet d'une catégorie (essentiellement) petite $\mathcal{A}$ muni d'une action d'un groupe interne G de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est munie de la topologie canonique J_c et

$$\ell : \mathcal{A} \xrightarrow{\ y\ } \widehat{\mathcal{A}} \xrightarrow{\ j^*\ } \widehat{\mathcal{A}}_{J_c}$$

désigne le foncteur associé de plongement de $\mathcal{A}$ dans le topos $\widehat{\mathcal{A}}_{J_c}$, le quotient

$$\ell(G) \backslash \ell(X) = {\rm coker}\,(\ell(G) \times \ell(X) \rightrightarrows \ell(X))$$

de $\ell(X)$ par l'action du groupe interne $\ell(G)$ de $\widehat{\mathcal{A}}_{J_c}$ est représentable par un objet $G \backslash X$ de $\mathcal{A}$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ll}
(0) & G\backslash X \text{ est un quotient de } X \text{ par l'action de } G \text{ au sens que l'on a dans la catégorie } \mathcal{A} \\
& \qquad G\backslash X = \operatorname{coker}\left(G \times X \rightrightarrows X\right) . \\
(1) & \text{Le morphisme} \\
& \qquad X \longrightarrow G\backslash X \\
& \text{est épimorphique strict universel.} \\
(2) & \text{Pour tout carré commutatif de } \mathcal{A} \\
& \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & G\backslash X \end{array} \\
& \text{il existe une famille épimorphique stricte universelle de flèches de } \mathcal{A} \\
& \qquad X'_i \xrightarrow{p_i} X' \\
& \text{dont les composées } (f \circ p_i, g \circ p_i) \text{ sont égales aux composées d'une flèche} \\
& \qquad X'_i \longrightarrow G \times X \\
& \text{avec les deux morphismes} \\
& \qquad G \times X \rightrightarrows X .
\end{array}\right.$$

Dans le cas où le produit fibré

$$X \times_{G\backslash X} X$$

est bien défini dans la catégorie $\mathcal{A}$, la condition (2) équivaut à demander que le morphisme

$$G \times X \longrightarrow X \times_{G\backslash X} X$$

soit épimorphique strict universel.

Démonstration :

(i) est l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du lemme VIII.3.1.

(ii) Par définition, la limite

$$\varprojlim_{D} a_\bullet$$

est bien définie dans $\mathcal{A}$ si et seulement si le préfaisceau

$$\varprojlim_{D} y(a_\bullet)$$

dans $\widehat{\mathcal{A}}$ est représentable par un objet de $\mathcal{A}$ qui est alors $\varprojlim\limits_{D} a_\bullet$.

La conclusion résulte de ce que $\widehat{\mathcal{A}}_J$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{A}}$ qui contient les images par y des objets de $\mathcal{A}$ et que le foncteur pleinement fidèle $j_* : \widehat{\mathcal{A}}_J \to \widehat{\mathcal{A}}$ respecte toutes les limites.

(iii) S'il existe un objet b^a de $\mathcal{A}$ tel que

$$\ell(b^a) = \ell(b)^{\ell(a)} \qquad \text{dans} \qquad \widehat{\mathcal{A}}_J \, ,$$

alors on a pour tout objet x de $\mathcal{A}$ la suite d'identifications

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x, b^a) &= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(x), \ell(b^a)) \\
&= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(x), \ell(b)^{\ell(a)}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a) \times \ell(x), \ell(b)) \\
&= \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a \times x), \ell(b)) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a \times x, b)
\end{aligned}$$

qui montre que b^a représente le foncteur $x \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a \times x, b)$.

Réciproquement, si b^a est un objet de $\mathcal{A}$ qui représente ce foncteur, on a pour tout objet x de $\mathcal{A}$ un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a) \times \ell(x), \ell(b)) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(x), \ell(a^b))\,.$$

Or tout objet F de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ s'écrit canoniquement comme la colimite

$$F = \varinjlim_{(x,z) \in \int F} \ell(x)$$

calculée dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ sur la catégorie $\int F$ des paires (x,z) constituées d'un objet x de $\mathcal{A}$ et d'un élément $z \in F(x)$.

Comme le foncteur $\ell(a) \times \bullet$ de produit avec $\ell(a)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ respecte les colimites, on en déduit pour tout tel objet F de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a) \times F, \ell(b)) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(F, \ell(a^b))\,.$$

Autrement dit, l'objet $\ell(a^b)$ de $\widehat{\mathcal{A}}_J$ représente comme annoncé le foncteur

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{A}}_J)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Ens}\,, \\
F &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a) \times F, \ell(b))\,.
\end{aligned}$$

(iv) Si

$$\ell(a) = \varinjlim_{D} \ell(a_\bullet)$$

dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$, on a pour tout objet e de $\mathcal{A}$

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a), \ell(e)) = \varprojlim_{D} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{A}}_J}(\ell(a_\bullet), \ell(e))$$

soit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, e) = \varprojlim_{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a_\bullet, x)$$

qui signifie

$$a = \varinjlim_{D} a_\bullet \qquad \text{dans} \quad D\,.$$

Réciproquement, si a est une colimite dans $\mathcal{A}$ du D-diagramme $a_\bullet$, le morphisme canonique de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\varinjlim_{D} \ell(a_\bullet) \longrightarrow \ell(a)$$

est un isomorphisme si et seulement si sont vérifiées les deux conditions suivantes :

(1) La famille des morphismes de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\ell(a_d) \longrightarrow \ell(a)\,, \qquad d \in \mathrm{Ob}(D)\,,$$

est épimorphique.

(2) Pour tous objets d, d' de D, considérant la famille des carquois finis

$$d = d_0 \longleftrightarrow d_1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow d_n = d'$$

constitués d'objets $d_0 = d, d_1, \ldots, d_{n-1}, d_n = d'$ de D et de flèches $d_{i-1} \to d_i$ ou $d_i \to d_{i-1}$ de D notées $d_{i-1} \leftrightarrow d_i$, la famille associée des morphismes de $\widehat{\mathcal{A}}_J$

$$\varprojlim_{D_n} \ell(a_\bullet) \longrightarrow \ell(a_d) \times_{\ell(a)} \ell(a_{d'})$$

est épimorphique.

Or la condition (1) équivaut à demander que la famille des morphismes de $\mathcal{A}$

$$a_d \longrightarrow a\,, \qquad d \in \mathrm{Ob}(D)\,,$$

soit J-couvrante.

De même, la condition (2) équivaut à demander que pour tous objets d, d' de D et tout objet b de $\mathcal{A}$ s'inscrivant dans un carré commutatif de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & a_{d'} \arrow[d] \\ a_d \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

il existe une famille J-couvrante de b constituée de morphismes

$$b' \longrightarrow b$$

tels que les morphismes associés

$$\ell(b') \longrightarrow \ell(a_d) \times_{\ell(a)} \ell(a_{d'})$$

se factorisent chacun à travers la limite $\varprojlim\limits_{D_n} \ell(a_\bullet)$ dans $\widehat{\mathcal{A}}_J$ du diagramme déduit de $\ell(a_\bullet)$ sur un carquois D_n de la forme $(d = d_0 \leftrightarrow d_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow d_n = d')$.

La conclusion résulte de ce que, si J est une topologie sous-canonique, toute famille J-couvrante est épimorphique stricte universelle, et réciproquement si $J = J_c$ est la topologie canonique.

$\square$

c) La topologie canonique des catégories géométriques

Intéressons-nous à la topologie canonique des "catégories géométriques" (c'est-à-dire des sous-catégories de la catégorie $\mathrm{Top}_{\mathrm{an}}$ des espaces topologiques annelés) qui sont la "géométrisation" $\widetilde{\mathcal{V}}$ d'une catégorie $\mathcal{V}$ géométrisable au sens de la définition IV.2.5. La détermination de la topologie canonique d'une telle géométrisation $\widetilde{\mathcal{V}}$ se ramène à celle de la topologie canonique de $\mathcal{V}$:

Lemme VIII.3.4. –

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie munie d'un foncteur

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Top}_{\mathrm{an}}$$

qui la rend géométrisable, et soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ la géométrisation de $\mathcal{V}$.

Alors :

(i) *Pour tout objet (X, O_X) de $\widetilde{\mathcal{V}}$ recouvert par des ouverts U_i, la famille des morphismes*

$$U_i \longrightarrow X$$

est couvrante pour la topologie canonique de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (c'est-à-dire épimorphique stricte universelle).

(ii) *Pour qu'une famille de morphismes de $\widetilde{\mathcal{V}}$*

$$X_i \longrightarrow X\,, \qquad i \in I\,,$$

soit couvrante pour la topologie canonique de $\widetilde{\mathcal{V}}$, il faut et il suffit que pour un [resp. pour tout] recouvrement de X par des ouverts U_j, $j \in J$, qui sont des objets de $\mathcal{V}$, il existe pour chaque U_j une famille de morphismes de $\mathcal{V}$

$$V_{j,k} \longrightarrow U_j$$

telle que :

- *pour tous j, k, $V_{j,k}$ s'identifie à un ouvert de l'un des X_i de façon à rendre commutatif le carré*

$$\begin{tikzcd} V_{j,k} \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ U_j \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

- *pour tout j, la famille des morphismes*

$$V_{j,k} \longrightarrow U_j$$

  est couvrante pour la topologie canonique de $\mathcal{V}$.

Démonstration :

(i) résulte de ce que, pour tout recouvrement d'un objet X de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par des ouverts U_i, on a d'une part que se donner un morphisme

$$X \longrightarrow Z$$

vers un objet Z de $\widetilde{\mathcal{V}}$ équivaut à se donner une famille de morphismes

$$X_i \longrightarrow Z$$

qui coïncident sur les intersections $X_i \cap X_j$, et d'autre part, que pour tout morphisme de $\widetilde{\mathcal{V}}$

$$f : Y \longrightarrow X\,,$$

les $f^{-1}(U_i) = Y \times_X U_i$ sont bien définis en tant qu'ouverts de Y et forment un recouvrement.

(ii) résulte de (i) et des axiomes de stabilité et de transitivité vérifiées par la topologie canonique de $\widetilde{\mathcal{V}}$. $\square$

Le lemme suivant combiné avec le précédent permet de caractériser les familles couvrantes pour la topologie canonique dans les catégories géométriques des variétés différentielles, des variétés analytiques ou des schémas :

Lemme VIII.3.5. –

(i) *Soit $\mathcal{V}$ la catégorie géométrisable dont les objets sont les ouverts des $\mathbb{R}^n$ [resp. des $\mathbb{C}^n$], $n \geq 0$, et dont les morphismes sont les applications de classe C^∞ [resp. analytiques] entre ces ouverts.*

Alors une famille de morphismes de $\mathcal{V}$

$$U_i \longrightarrow U\,, \qquad i \in I\,,$$

est couvrante pour la topologie canonique si et seulement si elle est globalement surjective et que, pour tout morphisme de $\mathcal{V}$

$$V \longrightarrow U\,,$$

il existe une famille de morphismes de $\mathcal{V}$

$$V_j \longrightarrow V$$

s'inscrivant dans des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r] \arrow[d] & U_{i_j} \arrow[d] \\ V \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

et telle que toute fonction

$$V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad [\textit{resp.} \quad V \longrightarrow \mathbb{C}\ ]$$

est de classe C^∞ [resp. analytique] si et seulement si toutes les composées

$$V_j \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad [\textit{resp.} \quad V_j \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{C}\ ]$$

sont de classe C^∞ [resp. analytiques].

(ii) *Considérons la catégorie géométrisable* Aff *des schémas affines.*

Alors une famille de morphismes de tels schémas

$$\mathrm{Spec}(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,, \qquad i \in I\,,$$

c'est-à-dire de morphismes d'anneaux commutatifs

$$A \longrightarrow A_i\,, \qquad i \in I\,,$$

est couvrante pour la topologie canonique de Aff *si et seulement si on a pour tout morphisme d'anneaux commutatifs*

$$A \longrightarrow B$$

l'identité

$$B = \ker\left(\prod_i B \otimes_A A_i \rightrightarrows \prod_{i,j} B \otimes_A A_i \otimes_A A_j\right).$$

Remarque :

Pour tout point de Spec(A), c'est-à-dire tout idéal premier p de A, la condition de (ii) appliquée au corps des fractions de A/p implique que, pour toute famille couvrante

$$\mathrm{Spec}(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)\,,$$

p est dans l'image de l'un au moins des Spec(A_i).

Autrement dit, la famille des applications

$$\mathrm{Spec}(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

doit être globalement surjective.

Démonstration :

(i) Considérons une famille de morphismes de $\mathcal{V}$

$$U_i \longrightarrow U\,, \qquad i \in I\,,$$

et le crible C de U qu'elle engendre.

Si ce crible est couvrant pour la topologie canonique, alors pour tout point x de U, le crible x^*C de x est encore couvrant. Cela signifie que la famille des $U_i \to U$ est globalement surjective.

Réciproquement, supposons que cette condition est vérifiée.

Alors on a pour tout morphisme $f : V \to U$ de $\mathcal{V}$ l'identité

$$V = \varinjlim_{(V' \to V) \in f^*C} V'$$

dans la catégorie Ens des ensembles. Autrement dit, se donner une application

$$V \longrightarrow W$$

dans un ensemble W équivaut à se donner une famille compatible d'applications

$$V' \longrightarrow W \quad \text{indexées par les} \quad (V' \longrightarrow V) \in f^*C\,.$$

Pour que le crible C soit couvrant, il faut et il suffit que pour tout tel morphisme $f : V \to U$ de $\mathcal{V}$ et pour tout objet W de $\mathcal{V}$, une application

$$V \longrightarrow W$$

soit de classe C^∞ [resp. analytique] si et seulement si il en est ainsi de ses composées $V' \to W$ avec les $(V' \to V) \in f^*C$.

Or chaque objet W de $\mathcal{V}$ est un ouvert d'un $\mathbb{R}^n$ [resp. $\mathbb{C}^n$] donc il suffit que le critère soit vérifié dans le cas où $W = \mathbb{R}$ [resp. $W = \mathbb{C}$].

(ii) résulte de la remarque (iv) qui suit la proposition VIII.3.2 puisque la catégorie Aff des schémas affines a des produits fibrés arbitraires qui sont définis par les produits tensoriels.

□

d) Classes de familles couvrantes pour la topologie canonique et topologie "fidèlement plate quasi-compacte" des schémas

Dans le cas des variétés différentielles ou analytiques, voici le type le plus important de familles couvrantes pour la topologie canonique :

Corollaire VIII.3.6. –

Soit $\widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}ar_{\text{diff}}$ *ou* $\mathcal{V}ar_{\text{an}}$ *la catégorie des variétés différentielles ou celle des variétés analytiques.*

Alors, pour qu'une famille de morphismes

$$f_i : X_i \longrightarrow X \,, \qquad i \in I \,,$$

soit épimorphique stricte universelle, il suffit que pour tout $x \in X$*, il existe un indice* $i \in I$ *et un point* $y \in X_i$ *tel que* $f_i(y) = x$ *et que l'application* f_i *doit "submersive" (au sens de la définition* IV.3.7 (i)*) dans un voisinage ouvert du point* y*.*

Démonstration :

D'après le lemme VIII.3.4, il suffit de traiter le cas où X et les X_i sont des ouverts des $\mathbb{R}^n$ [resp. des $\mathbb{C}^n$].

Le corollaire résulte alors du théorème "des fonctions implicites".

Celui-ci assure en effet qu'existe un voisinage ouvert U de x dans X au-dessus duquel le morphisme

$$f_i : X_i \longrightarrow X$$

se relève en une section $s : U \to X_i$ c'est-à-dire une application de classe C^∞ [resp. analytique] telle que $s(x) = y$ et que $f_i \circ s$ soit l'immersion de U dans X.

□

Dans le cas des schémas, le type le plus important de familles couvrantes pour la topologie canonique est celui des familles "fidèlement plates et quasi-compactes".

Pour l'introduire, on a besoin d'introduire la notion de morphisme plat :

Définition VIII.3.7. –

Un morphisme d'anneaux commutatifs

$$A \longrightarrow B$$

est dit plat si le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_A & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_B \,, \\ M & \longmapsto & B \otimes_A M \end{array}$$

est exact c'est-à-dire préserve les limites finies.

Remarque :

Les foncteurs $M \mapsto B \otimes_A M$ préservent toujours les colimites arbitraires car ils admettent pour adjoint à droite le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_B & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_A \,, \\ N & \longmapsto & \mathrm{Hom}_A(B, N) \,. \end{array}$$

Exemples :

(i) Si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux commutatifs et B est libre comme A-module (c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de copies du A-module A), alors $A \to B$ est plat.

(ii) En particulier, si A est un corps, tout morphisme $A \to B$ est plat.

(iii) Pour tout anneau commutatif A et tout entier $n \geq 1$, le morphisme $A \to A\,[X_1, \ldots, X_n]$ est plat.

(iv) Pour tout anneau commutatif A et tout polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n+1} + \ldots + a_0$ de $A[X]$ dont le coefficient dominant est 1, le morphisme $A \to A[X]/(P)$ est plat.

$\square$

Voici les principales propriétés des morphismes plats d'anneaux :

Proposition VIII.3.8. –

Dans la catégorie des anneaux commutatifs, on a :

(i) *Le composé de deux morphismes plats*

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

est encore un morphisme plat.

(ii) *Pour tout morphisme plat*

$$A \longrightarrow B$$

et tout morphisme $A \to A'$, le morphisme induit

$$A' \longrightarrow A' \otimes_A B$$

est encore un morphisme plat.

(iii) *Pour tout élément f d'un anneau A, le morphisme de localisation*

$$A \longrightarrow A_f = A[X]/(fX-1)$$

est un morphisme plat.

(iv) *Pour qu'un morphisme*

$$u : A \longrightarrow B$$

soit plat, il suffit qu'existent une famille d'éléments $f_i \in A$ engendrant l'idéal A et une famille d'éléments $g_j \in B$ engendrant l'idéal B telle que tous les morphismes

$$A_{f_i} \longrightarrow B_{u(f_i)g_j}$$

soient plats.

Démonstration :

(i) résulte de ce que le foncteur $M \mapsto C \otimes_A M$ s'identifie au composé des deux foncteurs $M \mapsto B \otimes_A M$ et $N \mapsto C \otimes_B N$.

(ii) résulte de ce que le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_{A'} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{A' \otimes_A B}\,, \\ M & \longmapsto & (A' \otimes_A B) \otimes_{A'} M \end{array}$$

composé avec le foncteur d'oubli

$$\mathrm{Mod}_{A' \otimes_A B} \longrightarrow \mathrm{Mod}_B$$

s'identifie avec le composé du foncteur d'oubli

$$\mathrm{Mod}_{A'} \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$$

et du foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_A & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_B\,, \\ M & \longmapsto & B \otimes_A M\,. \end{array}$$

(iii) est l'assertion (i) du lemme IV.3.14.

(iv) Comme tous les foncteurs

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_A & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{A_{f_i}}\,, \\ M & \longmapsto & A_{f_i} \otimes_A M \end{array}$$

préservent les limites finies, il suffit de prouver que pour toute famille d'éléments $g_j \in B$ qui engendrent l'idéal B et tels que les foncteurs

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_A & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{B_{g_j}}\,, \\ M & \longmapsto & B_{g_j} \otimes_A M \end{array}$$

préservent les limites finies, il en est de même du foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mod}_A & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_B\,, \\ M & \longmapsto & B \otimes_A M\,. \end{array}$$

Cela résulte de ce que, d'après le lemme IV.2.8 (v), tout B-module N s'écrit comme la limite

$$\ker\left(\prod_j N_{g_j} \rightrightarrows \prod_{j_1,j_2} N_{g_{j_1}g_{j_2}}\right)$$

du diagramme constitué des

$$N_{g_j} = B_{g_j} \otimes_B N \qquad \text{et} \qquad N_{g_{j_1}g_{j_2}} = B_{g_{j_1}g_{j_2}} \otimes_B N$$

reliés par les flèches

$$N_{g_{j_1}} \longrightarrow N_{g_{j_1}g_{j_2}} \longleftarrow N_{g_{j_2}}\,,$$

et de ce que les foncteurs de limites préservent toutes les limites. Cela achève la preuve de la proposition.

□

Cette proposition permet de définir la notion de morphisme plat de schémas et d'énoncer leurs principales propriétés :

Définition VIII.3.9. –

Un morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} Y$ *est dit plat lorsque pour tout point* x *de* X *et pour au moins une [resp. pour toute] paire de voisinages ouverts affines* $V = \mathrm{Spec}(A)$ *de* $f(x)$ *dans* Y *et* $U = \mathrm{Spec}(B)$ *de* x *dans* X *tels que* $f^{-1}(V) \supset U$*, le morphisme d'anneaux*

$$A \longrightarrow B$$

est plat. □

Corollaire VIII.3.10. –

(i) *Tout composé* $X \to Y \to Z$ *de morphismes plats de schémas est un morphisme plat.*

(ii) *Les morphismes plats sont stables par changement de base. Autrement dit, pour tout carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

tel que f soit un morphisme plat, f' est aussi un morphisme plat.

(iii) *La notion de morphisme plat $X \to Y$ est locale à la fois sur la base Y et sur la source X.*

Remarque :

En particulier, la notion de morphisme plat est “naturelle”. □

Après la notion de morphisme plat d'anneaux vient celle de morphisme fidèlement plat qui a d'autres propriétés remarquables :

Lemme VIII.3.11. –

Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs qui est fidèlement plat au sens que

$$\begin{cases} \bullet \quad \textit{il est plat,} \\ \bullet \quad \textit{l'application induite } \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) \textit{ est surjective.} \end{cases}$$

Alors :

(i) *Pour tout A-module M, le morphisme*

$$M \longrightarrow B \otimes_A M$$

est injectif.

En particulier, on a $B \otimes_A M \neq 0$ si $M \neq 0$.

(ii) *Pour toute suite de morphismes de A-modules*

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \qquad \textit{avec} \quad v \circ u = 0\,,$$

cette suite est exacte (au sens que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$) si et seulement si la suite induite

$$B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A N \longrightarrow B \otimes_A P$$

est exacte.

(iii) *Tout A-module M s'identifie à l'égalisateur*

$$\ker\left(B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M\right).$$

En particulier, on a pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $A \to A'$ l'identité

$$A' = \ker\left(B \otimes_A A' \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A A'\right).$$

Démonstration :

(i) Soient x un élément non nul de M,

$$n_x = \{a \in A \mid a \cdot x = 0\}$$

l'idéal de ses annulateurs, m un idéal maximal de A qui contient n_x et p un idéal premier de B dont l'image réciproque par $u : A \to B$ est l'idéal premier m.

Le monomorphisme de A-modules associé à l'élément x

$$A/n_x \lhook\joinrel\longrightarrow M$$

induit un monomorphisme de B-modules

$$B/u(n_x)\cdot B = B\otimes_A A/n_x \hookrightarrow B\otimes_A M\,.$$

Or $B/u(n_x)\cdot B$ admet pour quotient B/p qui est non nul.

Donc l'image de l'élément x dans $B\otimes_A M$ est non nulle et l'application

$$M \longrightarrow B\otimes_A M$$

est injective.

(ii) On sait déjà que si la suite

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$$

est exacte, il en est de même de la suite

$$B\otimes_A M \longrightarrow B\otimes_A N \longrightarrow B\otimes_A P\,.$$

Si elle n'est pas exacte, posons $N_1 = \mathrm{Im}(u)$, $P_1 = \mathrm{Im}(v)$, $N_2 = \mathrm{Ker}(u)$ et $H = N_2/N_1$ avec donc $H\neq 0$.

Les suites

$$M \longrightarrow N_1 \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P\,,$$
$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0\,,$$
$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

sont exactes donc aussi leurs transformées par le foncteur $B\otimes_A \bullet$, ce qui montre

$$B\otimes_A H = \mathrm{Ker}\left(B\otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{id}_B\otimes v} B\otimes_A P\right) \Big/ \,\mathrm{Im}\left(B\otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_B\otimes u} B\otimes_A N\right).$$

Or, d'après (i), on a $B\otimes_A H\neq 0$ puisque $H\neq 0$.

Cela signifie que la suite

$$B\otimes_A M \longrightarrow B\otimes_A N \longrightarrow B\otimes_A P$$

n'est pas exacte.

(iii) Il résulte de (ii) qu'il suffit de prouver l'identité

$$B\otimes_A M = \ker\left(B\otimes_A B\otimes_A M \rightrightarrows B\otimes_A B\otimes_A B\otimes_A M\right).$$

Or le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rcl} u: B & \longrightarrow & B\otimes_A B\,,\\ b & \longmapsto & b\otimes 1 \end{array}$$

vérifie la formule

$$v\circ u = \mathrm{id}_B$$

si v désigne le morphisme canonique

$$\begin{array}{rcl} B\otimes_A B & \longrightarrow & B\,,\\ b_1\otimes b_2 & \longmapsto & b_1\, b_2\,. \end{array}$$

Par conséquent, $B\otimes_A B$ vu comme B-module s'écrit comme la somme directe de B et de son idéal $\mathrm{Ker}(v)$.

On en déduit

$$B \otimes_A B \otimes_A M = (B \otimes_A M) \oplus (\mathrm{Ker}(v) \otimes_A M)$$

et un élément de $B \otimes_A B \otimes_A M$ est dans $B \otimes_A M$ si et seulement si sa projection dans

$$\mathrm{Ker}(v) \otimes_A M$$

est 0. Cela revient à demander qu'il a même image par les deux morphismes

$$B \otimes_A B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \, ,$$

$$b_1 \otimes b_2 \otimes x \longmapsto \begin{cases} b_1 \otimes b_2 \otimes 1 \otimes x \, , \\ b_1 \otimes 1 \otimes b_2 \otimes x \, . \end{cases}$$

□

On déduit de ce lemme :

Théorème VIII.3.12. –

Disons qu'une famille de morphismes de schémas

$$f_i : X_i \longrightarrow X \, , \qquad i \in I \, ,$$

est "fidèlement plate quasi-compacte" si :

- *chaque morphisme f_i est plat,*
- *chaque f_i est quasi-compacte (ce qui signifie que l'image réciproque dans X_i de tout ouvert affine de X est une réunion finie d'ouverts affines de X_i),*
- *pour tout ouvert affine U de X, il existe une sous-famille finie des $f_i : X_i \to X$ dont les restrictions*

  $$f_i : f_i^{-1}(U) \longrightarrow U$$

  forment une famille globalement surjective.

Alors :

(i) *Il existe dans la catégorie des schémas une topologie, dite "topologie fpqc", dont les cribles couvrants sont les cribles engendrés par les familles fidèlement plates quasi-compactes.*

(ii) *Cette topologie est sous-canonique.*

Autrement dit, toute famille de morphismes de schémas

$$X_i \longrightarrow X \, , \qquad i \in I \, ,$$

qui est fidèlement plate quasi-compacte est épimorphique stricte universelle.

Démonstration :

(i) L'axiome de maximalité résulte de ce que, pour tout schéma X, le morphisme $\mathrm{id}_X : X \to X$ est fidèlement plat quasi-compact. L'axiome de stabilité vient de ce que la notion de famille de morphismes fidèlement plate quasi-compacte est respectée par les changements de base.

Enfin, pour l'axiome de transitivité, considérons un anneau A, une famille finie de morphismes plats

$$A \longrightarrow A_i$$

et une famille finie de morphismes

$$A \longrightarrow B_j \,.$$

On suppose que la famille des $\mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(A)$ est globalement surjective ou, ce qui revient au même, que le morphisme

$$A \longrightarrow A' = \prod_i A_i$$

est fidèlement plat.

Il est évident que la famille des

$$\mathrm{Spec}(B_j) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

est globalement surjective si et seulement si il en est ainsi de la famille des

$$\mathrm{Spec}\,(A' \otimes_A B_j) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')\,.$$

De plus, pour toute suite de morphismes de A-modules

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$$

qui est exacte au sens que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$, les suites

$$B_j \otimes_A M \longrightarrow B_j \otimes_A N \longrightarrow B_j \otimes_A P$$

sont exactes si et seulement si les suites

$$B_j \otimes_A A' \otimes_A M \longrightarrow B_j \otimes_A A' \otimes_A N \longrightarrow B_j \otimes_A A' \otimes_A P$$

sont exactes.

Par conséquent, les morphismes

$$\mathrm{Spec}(B_j) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

sont plats dès que les morphismes

$$\mathrm{Spec}(B_j \otimes_A A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')$$

le sont.

L'axiome de transitivité résulte de cette constatation.

(ii) résulte de la partie (iii) du lemme VIII.3.11 d'après le lemme VIII.3.5 (ii) combiné avec le lemme VIII.3.4 (ii).

$\square$